
PHYSIK I

MECHANIK

Prof. Dieter Weiß
Wintersemester 2003/2004

gesetzt in L^AT_EX von Andreas Hasenkopf

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Grundbegriffe der Bewegung	4
2.1	Ort und Bahn eines Massepunktes	4
2.2	Geschwindigkeit	4
2.3	Beschleunigung	6
2.3.1	Gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung	6
2.3.2	Kreisbewegung	7
2.3.3	Die allgemeine krummlinige Bewegung	9
3	Die Newton'schen Gesetze	10
3.1	Kraft	10
3.2	Erstes Newton'sches Axiom (Trägheitsprinzip)	10
3.3	Kraft, Masse und das zweite Newton'sche Axiom	10
3.4	Drittes Newton'sches Axiom	11
3.5	Reibung	11
3.5.1	Haftreibung	11
3.5.2	Gleitreibung	11
3.5.3	Rollreibung	12
3.5.4	Strömungswiderstand	12
3.6	Das Gravitationsgesetz	12
3.6.1	Gravitationskonstante - Cavendish-Experiment	12
3.6.2	Fallgesetz	12
3.6.3	Äquivalenzprinzip	12
3.6.4	Schwingendes Fadenpendel	13
3.7	Die Kepler'schen Gesetze	13
4	Die Erhaltung von Energie und Impuls	15
4.1	Die Erhaltung der Summe von kinetischer und potentieller Energie	15
4.2	Konservative Kräfte	16
4.3	Zwei Beispiele	16
4.4	Potentielle Energie im Schwerfeld, Gesamtenergie und Umlaufbahnen	17
4.5	Gravitationsfeld einer Kugelschale und einer Vollkugel	18
4.6	Impulserhaltung und Stoßprozesse	19
4.7	Stoßprozesse	19
4.8	Gesamtimpuls eines Systems mit äußeren Kräften	20
4.8.1	Massenmittelpunkt	20
4.8.2	Bewegung des Massemittelpunktes	21
4.8.3	Der Massenmittelpunkt als Bezugssystem	21
5	Die rotierende Bewegung	22
5.1	Drehimpulserhaltung für einen Massenpunkt	22
5.1.1	Drehmoment und Drehimpuls	22
5.1.2	Die Erhaltung des Drehimpulses beim Wirken einer Zentralkraft	22
5.2	Drehimpulserhaltung in einem System von Massepunkten	23
5.2.1	Bewegung des Massenschwerpunktes	23
5.2.2	Drehimpulserhaltung in einem System von Massepunkten	23
5.3	Der Drehimpuls starrer Körper	24
5.3.1	Drehimpuls einer rotierenden Platte	24
5.3.2	Drehimpuls eines rotationssymmetrischen Körpers...	25
5.3.3	Berechnung des Trägheitsmoments	25
5.3.4	Steiner'scher Satz	26
5.3.5	Drehimpuls eines beliebig geformten Körpers	26
5.4	Die Energie eines starren Rotors	27
5.5	Der symmetrische Kreisel	28
5.5.1	Kräftefreier Kreisel	28
5.5.2	Der Kreisel unter dem Einfluss eines Drehmoments	28
5.6	Die kleinste Einheit des Drehimpulses in der Natur	29

5.7	Scheinkräfte im rotierenden Bezugssystem	30
6	Schwingungen	32
6.1	Freie ungedämpfte Schwingungen	32
6.2	Freie gedämpfte Schwingung	33
6.3	Erzwungene Schwingungen	35
6.4	Gekoppelte Oszillatoren	38
6.5	Parametrisch verstärkte Schwingungen	39
7	Nichtlineare Dynamik und Chaos	41
7.1	Nichtlineare Oszillatoren	41
7.2	Potentielle Energie: Harmonische und anharmonische Oszillatoren	41
7.2.1	Potentielle Energie des Fadenpendels	41
7.2.2	Magnetoszillator: Beispiel für anharmonische potentielle Energie	42
7.2.3	Potentielle Energie eines Duffing- Oszillators	42
7.3	Resonanzkurve nichtlinearer Oszillatoren	43
7.4	Der Phasenraum	44
7.5	Chaotische Dynamik	45
7.6	Logistische Abbildung und Feigenbaum- Diagramm	46
8	Mechanische Wellen	47
8.1	Beispiel Schallwellen	47
8.1.1	Ausbreitung einer Störung	47
8.1.2	Die Wellengleichung	47
8.1.3	Reflexion von Seilwellen	48
8.1.4	Sinusförmige harmonische Wellen	48
8.1.5	Reflexion harmonischer Wellen	49
8.1.6	Eigenfrequenz einer schwingenden Saite	50
8.2	Schallwellen	50
8.2.1	Longitudinale Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten	50
8.2.2	Stehende Schallwellen	51
8.2.3	Kugelwellen	51
8.2.4	Akustischer Dopplereffekt	52
8.3	Fourieranalyse, Dispersion und Wellenpakete	52
8.3.1	Fourieranalyse	52
8.3.2	Phasen und Gruppengeschwindigkeit	53
8.3.3	Wellenpakete und Dispersion	54
9	Die feste Materie	54
10	Flüssigkeiten	55
10.1	Hydrostatische Kräfte	55
10.1.1	Auftriebskraft	55
10.1.2	Oberflächenspannung	55
10.1.3	Benetzung fester Oberflächen	55
10.2	Kräfte in strömenden Flüssigkeiten	56
10.2.1	Trägheitskräfte in stationären Strömungen	56
10.2.2	Viskosität und Reibungskräfte	57
10.2.3	Strömung bei großen Geschwindigkeiten	58
10.2.4	Vom Fliegen	58

1 Einführung

Eine zentrale Frage der Physik lautet: Wie bewegt sich ein Teilchen unter dem Einfluß von Wechselwirkungen? Zum Beispiel:

- Planeten unter dem Einfluß der Gravitation
- Elektron im Atom im Coulombfeld des Kernes bzw. der anderen Elektronen
- Elektronen in Halbleitern und Metallen unter dem Einfluß elektrischer oder magnetischer Felder
- Nukleonen im Kern unter dem Einfluß der starken Wechselwirkung

Bereich der klassischen Mechanik:

- anwendbar, wenn v nicht zu groß ist ($v \ll c$)
- Newton'sche Mechanik beruht auf einem Konzept von Raum und Zeit, in dem die Zeit **nicht** vom Bezugssystem abhängt
- anwendbar, solange die Wellennatur der Materie nicht zum Tragen kommt

$$\vec{v}(\vec{r}, t) =? \tag{1}$$

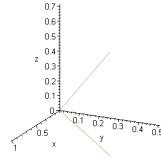
2 Grundbegriffe der Bewegung

2.1 Ort und Bahn eines Massepunktes

Massepunkt: Körper, dessen ganze Masse in einem Punkt zentriert ist.

Ort- und Bahnkurve wird in einem beliebigen Koordinatensystem festgelegt.

Ort:



Kartesische Koordinaten: $P(x, y, z)$

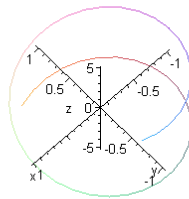
Kugelkoordinaten: $P(r, \theta, \phi)$

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (2)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (3)$$

$$z = r \cos \theta \quad (4)$$

Bahn:



2.2 Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit eines Massepunktes ist die Änderung seines Ortsvektors

$$\vec{r}(t) = (\vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{z}(t)) \quad (5)$$

in einem infinitesimal kleinen Zeitintervall

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \quad (6)$$

Mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall Δt : $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Geschwindigkeit \vec{v} (Momentangeschwindigkeit):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (7)$$

In Komponenten betrachtet:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (8)$$

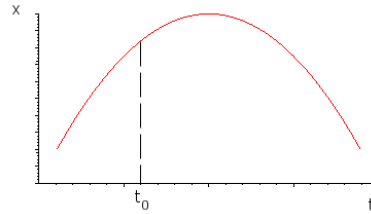
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad (9)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (10)$$

Die SI- Einheit ist $1 \frac{m}{s}$.

Geschwindigkeit ist ein Vektor, dessen Richtung durch $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ gegeben ist.

Beispiel: Weg- Zeit- Diagramm einer eindimensionalen Bewegung in x- Richtung



$$v_x = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} \quad (11)$$

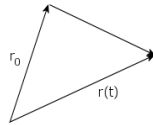
Steigung der Tangente an der Stelle $t = t_0$ entspricht der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = t_0$. Betrag der Geschwindigkeit

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (12)$$

Geradlinige gleichförmige Bewegung: liegt vor, wenn

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}_0 = const \quad (13)$$

zeitunabhängig ist. Objekt legt in gleichen Zeitintervallen gleiche Abstände zurück und Richtung der Bahn ändert sich nicht. Will man den Ort als Funktion der Zeit wissen, so muss man die seit $t = 0$ zurückgelegten Wege addieren.

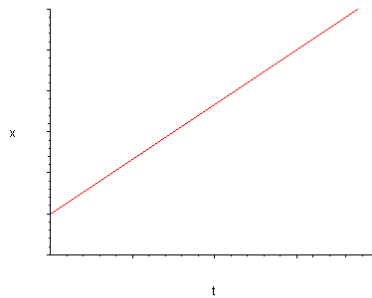


$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \int_0^t dt' \frac{d\vec{r}}{dt'} = \int_0^t dt' \vec{v}_0 = \vec{v}_0 t \quad (14)$$

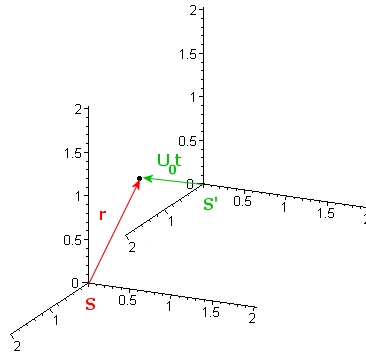
$$\rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \quad (15)$$

mit Integrationskonstante \vec{r}_0 . In einer Dimension:

$$x(t) = x_0 + v_x t \quad (16)$$



Bewegtes Bezugssystem, z.B. laufender Mann auf Waggon:



System S' (Waggon) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{U}(t)$ relativ zum System S (z.B. Bahnsteig)

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{U}t \quad (17)$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{U} \quad (18)$$

$$t = t' \quad (19)$$

GALILEI- TRANSFORMATION:

- gilt nur für kleine Geschwindigkeiten ($\vec{U} \ll c$)
- solche gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit \vec{U} bewegte Systeme heißen INERTIALSYSTEME

2.3 Beschleunigung

Wenn sich die Geschwindigkeit eines Körpers zeitlich ändert, spricht man von einer BESCHLEUNIGTEN BEWEGUNG. Die Beschleunigung ist definiert als Änderung der Geschwindigkeit in einem infinitesimal kleinen Zeitintervall.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \quad (20)$$

2.3.1 Gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung

Gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung liegt vor, wenn $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \text{const}$ zeitunabhängig ist.

$$\vec{v}(t) : \int_0^t dt' \frac{d^2 \vec{r}}{dt'^2} = \int_0^t dt' \vec{a}_0 = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right]_0^t \quad (21)$$

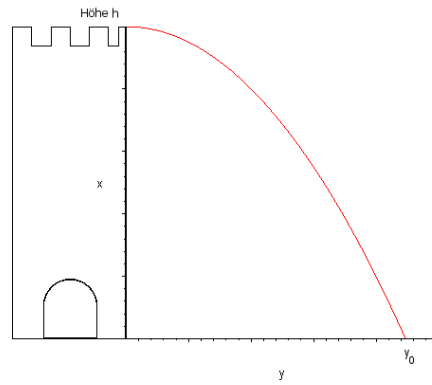
$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t=0) + \vec{a}_0 t \quad (22)$$

$$\vec{r}(t) : \int_0^t dt' \frac{d\vec{r}}{dt'} = \int_0^t dt' (\vec{v}_0 + \vec{a}_0 t') \quad (23)$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 t^2 \quad (24)$$

Integrationskonstanten: \vec{v}_0 ist Anfangsgeschwindigkeit und \vec{r}_0 ist Bahnpunkt zum Zeitpunkt $t = 0$. Wenn $\vec{a}_0 = 0 \Rightarrow$ geradlinige gleichförmige Bewegung

Beispiel: freier Fall mit horizontaler Bewegung



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Zurückgelegter Weg in x- bzw. y- Richtung

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \quad (26)$$

$$y = v_0t \quad (27)$$

: **Reichweite:** y_0 . Mit $x = h$ folgt für die Zeit bis zum Aufschlag:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow y_0 = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (28)$$

Bahnkurve:

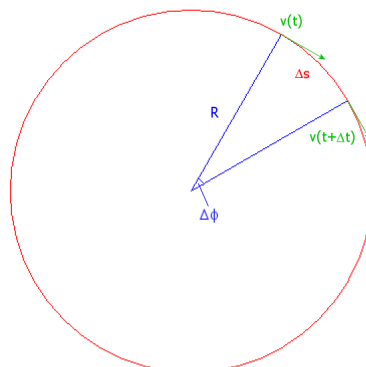
$$t = \frac{y}{v_0} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}y^2 \sim y \propto \sqrt{x} \quad (29)$$

Vektoriell ausgedrückt:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}gt^2 \\ v_0t \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} gt \\ v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

2.3.2 Kreisbewegung

Gleichförmige Kreisbewegung: Betrag der Geschwindigkeit ist konstant, aber die Richtung ändert sich ständig.



Einheitsvektor \hat{t} in Richtung der Tangente

$$\vec{v}(t) = v\hat{t} \quad (31)$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) = v\hat{t}(t + \Delta t) \quad (32)$$

$$|\hat{t}| = 1 \quad (33)$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = ?, \quad \Delta s = \Delta\phi R, \quad (\text{Bogenmaß}) \quad (34)$$

Bemerkung:

Grad	Bogenmaß	Kreisbogen
$\Delta\phi$	$\rightarrow \Delta\phi \frac{2\pi}{360}$	$2\pi R \frac{\Delta\phi}{360}$

Betrag der Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\phi}{dt} = R \frac{d\phi}{dt} = R\omega \quad (35)$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \text{ heißt KREISFREQUENZ} \quad (36)$$

$$vT = 2\pi R = R\omega T \quad (37)$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (38)$$

Wie verhält sich die Beschleunigung?

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} v\hat{t} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + \underbrace{v \frac{d\hat{t}}{dt}}_{\text{Änderung der Richtung}} \quad (39)$$

\vec{a} steht senkrecht auf \vec{v} bzw. \hat{t} , weil z.B.

$$\frac{d}{dt} \hat{t}^2 = 2\hat{t} \frac{d\hat{t}}{dt} = 0 \Rightarrow d\hat{t} \perp \hat{t} \quad (40)$$

Der Vektor $d\hat{t}$ zeigt zum Mittelpunkt der Kreisbewegung. Einheitsvektor in diese Richtung ist \hat{n} . Betrag von $d\hat{t}$ bzw. $\Delta\hat{t}$?

$$|\Delta\hat{t}| \approx \Delta\phi |\hat{t}| = \Delta\phi \quad (41)$$

Damit kann man $\Delta\hat{t}$ als Vektor in Richtung Kreismittelpunkt ausdrücken:

$$\Delta\hat{t} \approx \Delta\phi \hat{n} \Rightarrow \frac{\Delta\hat{t}}{\Delta t} \approx \hat{n} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad (42)$$

$$\Delta t \rightarrow 0: \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \hat{n} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = v\omega \hat{n} = R\omega^2 \hat{n} = -\omega^2 \vec{R} \quad (43)$$

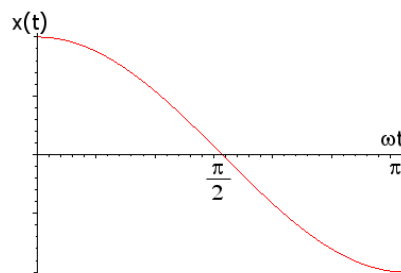
Beschleunigung zeigt bei Kreisbewegung immer zum Mittelpunkt des Kreises.

Alternative Betrachtung:

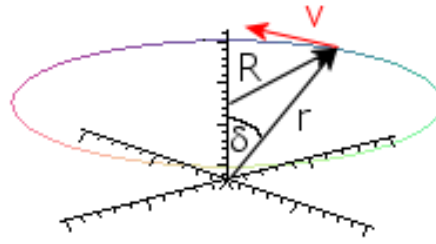
$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \end{pmatrix} ; \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -R\omega \sin \omega t \\ R\omega \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos \omega t \\ -R\omega^2 \sin \omega t \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{R} \quad (45)$$

Lineare harmonische Schwingung:



Fazit: Beschleunigungsvektor $\vec{a} = -\omega^2 \vec{R}$ mit $|\vec{a}| = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$ heißt ZENTRIPEDALBESCHLEUNIGUNG, weil \vec{a} zum Kreiszentrum zeigt.



Zusammenhang zwischen v , ω , r kann vektoriell geschrieben werden:

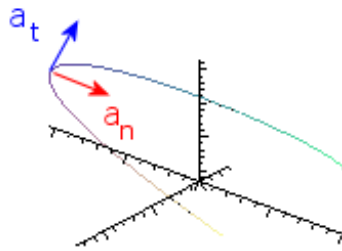
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (46)$$

Richtung von $\vec{\omega}$ ist senkrecht auf der Drehebene. \vec{v} und $\vec{\omega}$ bilden Rechtssystem. $\vec{v} = \omega \vec{e}_\omega \times \vec{r}$: Vektor, der senkrecht auf $\vec{\omega}$ und \vec{r} steht.

$$|\vec{v}| = \omega R = \omega r \sin \delta = |\vec{\omega} \times \vec{r}| \quad (47)$$

Bekerkung: Vektoren, die Rotation beschreiben, sind sogenannte AXIALVEKTOREN (Pseudovektoren). Diese Vektoren transformieren sich z.B. bei Punktspiegelung ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$) anders als polare Vektoren (z.B. \vec{v} , \vec{a})

2.3.3 Die allgemeine krummlinige Bewegung



Im Allgemeinen ändert sich die Geschwindigkeit \vec{v} in Betrag und Richtung

$$\vec{v} = v \hat{t} \quad (48)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{t}) = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{(*)} \hat{t} + v \underbrace{\frac{d\hat{t}}{dt}}_{(**)} \quad (49)$$

(*): Tangentialbeschleunigung \vec{a}_t

(**): Normalbeschleunigung $\vec{a}_n \perp \vec{v}$

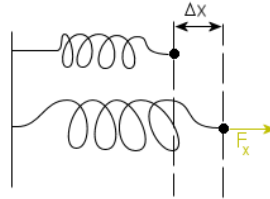
3 Die Newton'schen Gesetze

3.1 Kraft

Ursache von Bewegung oder Verformung: Kraft. Auf den Begriffen von Kraft und Masse beruht die ganze Newton'sche Mechanik.

- Kräfte sind durch Betrag, Richtung und Angriffspunkt charakterisiert
- Kräfte lassen sich z.B. durch die Verformung, die sie an elastischen Körpern hervorrufen, messen.

Beispiel: Federwaage



$$F_x = \underbrace{-}_{(*)} \underbrace{C}_{(**)} \Delta x \quad (\text{Hook'sches Gesetz}) \quad (50)$$

(*): Rückstellkraft gegen F_x

(**): Hängt von der Feder ab

3.2 Erstes Newton'sches Axiom (Trägheitsprinzip)

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmiger geradliniger Bewegung, falls er nicht durch eine äußere Kraft gezwungen wird, diesen Zustand zu verlassen

Die Eigenschaft eines Körpers seinen Bewegungszustand nicht zu ändern nennt man TRÄGHEIT. Das erste Newton'sche Axiom unterscheidet nicht zwischen dem Zustand der Ruhe und einem mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegten. Die Frage, ob sich ein Körper bewegt, hängt vom Bezugssystem ab.

3.3 Kraft, Masse und das zweite Newton'sche Axiom

Aktionsprinzip: Die Beschleunigung eines Körpers ist umgekehrt proportional zur Masse und direkt proportional zur resultierenden Kraft, die auf ihn wirkt:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (51)$$

Das erste und zweite Newton'sche Axiom können wir als Definition einer Kraft ansehen. Eine Kraft ist die Größe, die einen Körper dazu veranlasst, seine Geschwindigkeit zu verändern bzw. zu beschleunigen. Wirken mehr Kräfte auf den Körper, so erfolgt seine Beschleunigung \vec{a} in Richtung der resultierenden Kraft $\sum_i \vec{F}_i$. Die TRÄGE MASSE ist die jedem Körper inne wohnende Eigenschaft, sich einer Beschleunigung zu widersetzen.

Definition der Masse über die Beschleunigung:

Kraft F wirkt auf Masse $m_1 \rightarrow$ messe a_1

Kraft F wirkt auf Masse $m_2 \rightarrow$ messe a_2

$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2 \rightsquigarrow m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2} \quad (52)$$

Damit ist Definition einer Massenskala möglich.

PRIMÄRNORMAL: Platin- Iridium- Zylinder in Paris. Seine Masse beträgt nach Definition 1kg .

Einheit der Kraft: 1 Newton (N) entspricht jener Kraft, die benötigt wird, um einen Körper

der Masse 1kg mit $1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ zu beschleunigen.

Allgemeine Formulierung des Aktionsprinzips: Mit Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ folgt für das Aktionsprinzip:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} \quad (53)$$

Dies gilt auch im Bereich relativistischer Massenzunahme

3.4 Drittes Newton'sches Axiom

Kräfte treten nur in Kraft- Gegenkraft- Paaren auf (action = reactio)

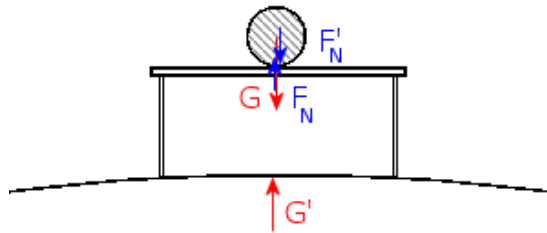
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (54)$$

\vec{F}_{12} : Kraft, die Körper 2 auf Körper 1 ausübt

\vec{F}_{21} : Kraft, die Körper 1 auf Körper 2 ausübt

\vec{F}_{12} und \vec{F}_{21} wirken auf verschiedene Körper. Deshalb können sich Kraft und Gegenkraft niemals aufheben. Bei Anwendung des 2. Newton'schen Axioms ist **nur** die Kraft auf den jeweils betrachteten Körper heran zu ziehen.

Beispiel: Kräftepaare: $\vec{G} = -\vec{G}'$, $\vec{F}_N = -\vec{F}'_N$. Im Beispiel wird die Gewichtskraft \vec{G} kompensiert durch die Auflagekraft (oder Normalkraft) \vec{F}'_N .



3.5 Reibung

Reibungskraft entsteht durch die Wechselwirkung der Atome bzw. Moleküle der an sich reibenden Oberflächen.

3.5.1 Haftreibung

Maximale Haftreibungskraft

$$\vec{F}_{H,max} = \mu_H F_N \quad (55)$$

mit der Haftreibungszahl μ_H . F_H ist proportional zur mikroskopischen Auflagefläche und somit zu F_N . Körper bewegt sich nicht, wenn horizontale Kraft kleiner als $F_{H,max}$ ist.

3.5.2 Gleitreibung

ist die Haftreibungsschwelle überschritten, setzt Gleitreibung ein.

$$F_G = \mu - GF_N \quad (56)$$

mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ_G . Experimentell findet man:

- $\mu_G \leq \mu_H$
- μ_G ist im Geschwindigkeitsbereich $1\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ bis einige $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ konstant.
- μ_G hängt (wie μ_H) von der Oberflächenstruktur und der Normalkraft ab, aber nicht von der Auflagefläche

3.5.3 Rollreibung

$$F_R = \mu_R F_N \quad (57)$$

mit Rollreibungszahl μ_R

3.5.4 Strömungswiderstand

Strömungswiderstand wächst mit zunehmender Geschwindigkeit an. Oft findet man folgenden Zusammenhang

$$F_S = bv^n, \quad (58)$$

wobei b ein formabhängiger Reibungskoeffizient ist. Dabei ist n oft 1 oder 2. Für Autos wird kleines b angestrebt.

Fallschirmspringer:

$$F = mg - bv^2 = ma \quad (59)$$

wird beschleunigt, bis $mg = bv^2$. Daraus ergibt sich eine Endgeschwindigkeit von

$$v = \sqrt{\frac{mg}{b}} \quad (60)$$

3.6 Das Gravitationsgesetz

Ein Teilchen mit Masse m_1 zieht jede andere Masse m_2 im Universum mit einer Kraft \vec{F} an

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (61)$$

Dabei ist \hat{r} der Einheitsvektor von m_1 nach m_2 und γ die Gravitationskonstante mit $\gamma = 6.673 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

3.6.1 Gravitationskonstante - Cavendish-Experiment

$$Drehmoment = Torsionskonstante * Drehwinkel \quad (62)$$

3.6.2 Fallgesetz

Galilei fand, dass alle Körper unabhängig von ihrer Größe, Form oder sonstigen Beschaffenheit beim freien Fall die gleiche Beschleunigung erfahren. Erdbeschleunigung am 50. Breitengrad: $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$. Gravitationskraft:

$$\vec{G} = m\vec{g}, \quad g = \gamma \frac{M_E}{R_E^2} \quad (63)$$

mit M_E = Masse der Erde und R_E = Erdradius. Dies gilt in Nähe der Erdoberfläche

3.6.3 Äquivalenzprinzip

Annahme: schwere und träge Masse sind nicht gleich.

Kraft, die Gravitation (in Bodennähe) auf die schwere Masse m_s ausübt:

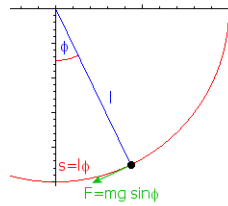
$$G = \gamma \frac{M_E m_s}{R_E^2} \quad (64)$$

Fallbeschleunigung des selben Körpers wäre dann

$$g = \frac{F}{m_t} = \frac{G}{m_t} = \gamma \frac{M_E}{R_E^2} \frac{m_s}{m_t} \quad (65)$$

Wenn m_s eine Eigenschaft von Materie wie Härte, Farbe, etc. wäre \rightarrow unterschiedliche Erdbeschleunigung \Rightarrow Annahme falsch

3.6.4 Schwingendes Fadenpendel



Wir betrachten einen masselosen Faden. Tangentialbeschleunigung:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(l\phi) = l \frac{d^2 \phi}{dt^2} \quad (66)$$

Aus Aktionsprinzip folgt:

$$m_T l \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -m_s g \sin \phi \quad (67)$$

$$\text{Für kleine Winkel: } \sin \phi \approx \phi \quad (68)$$

$$m_T l \ddot{\phi} = -m_s g \phi \quad (69)$$

$$\rightarrow \ddot{\phi} + \frac{m_s g}{m_T l} \phi = 0 \text{ Differentialgleichung} \quad (70)$$

Ansatz mit Anfangsbedingungen (Beispiel):

$$\phi(t) = A \cos(\omega t + \delta) \quad (71)$$

$$\phi(t=0) = \phi_0 \quad (72)$$

$$\dot{\phi}(t=0) = 0 \quad (73)$$

Das bedeutet hier, dass das Pendel bei $t = 0$ am Umkehrpunkt ist

$$\Rightarrow \phi(t) = \phi_0 \cos \omega t \quad (74)$$

Lösung eingesetzt in Differentialgleichung:

$$-\phi_0 \omega^2 \cos \omega t + \frac{m_s g}{m_T l} \phi_0 \cos \omega t = 0 \quad (75)$$

$$\omega^2 = \frac{m_s g}{m_T l} \quad (76)$$

$$\leadsto T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m_T l}{m_s g}} \quad (77)$$

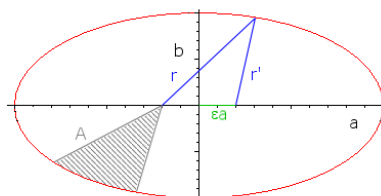
Experiment: $m_T = m_s$. Beobachtete Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Pendelmasse nur gegeben, wenn $m_T = m_s$. $\frac{m_s}{m_T}$ ändert sich um weniger als $1 : 10^{11}$ für verschiedene Körper.

3.7 Die Kepler'schen Gesetze

Messungen von Planetenpositionen durch Tycho und Brahe führten Johannes Kepler zu folgenden empirischen Gesetzen:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne, und die Sonne steht in einem Brennpunkt der Ellipse

Definition der Ellipse:



$$r + r' = 2a \quad (78)$$

ϵ : Exzentrizität, $\epsilon = 0 \rightsquigarrow$ Kreisbahn.
 Folge des $\frac{1}{r^2}$ -Kraftgesetzes

2. Die Verbindungslinie zwischen der Sonne und einem der Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

$$2dA = |\vec{r} \times d\vec{r}| = |\vec{r} \times \vec{v}|dt \quad (79)$$

$$2 \frac{dA}{dt} = |\vec{r} \times \vec{v}| * m \quad (80)$$

$$2m \frac{dA}{dt} = \underbrace{|\vec{r} \times \vec{p}|}_{\text{Drehimpuls}} = \text{const} \quad (81)$$

Drehimpulserhaltung

3. Das Quadrat der Umlaufzeit eines Planeten ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse seiner Bahn

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const} \quad (82)$$

Dies ist eine Konsequenz des Gravitationsgesetzes: Betrachte Spezialfall kreisförmiger Bahnen ($a = r$): Aktionsprinzip:

$$\gamma \frac{M_s m}{r^2} = m \underbrace{\omega^2 r}_{(*)} \quad (83)$$

M_s : Masse der Sonne, m : Masse eines Planeten, (*): Zentripetalbeschleunigung. Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $r = a$:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} \quad (84)$$

4 Die Erhaltung von Energie und Impuls

Energie kommt in unterschiedlichen Formen vor: kinetische, Wärmeenergie, elektrische, etc. **Erfahrung:** Energie bleibt in jedem abgeschlossenen System konstant. Im Folgenden werden 2 Energieformen diskutiert: kinetische und potentielle Energie

4.1 Die Erhaltung der Summe von kinetischer und potentieller Energie

Bahn eines Massenpunktes unter der Wirkung einer Kraft \vec{F} . Impuls- und Positionsänderung im Zeitintervall dt :

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \quad (85)$$

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \quad (86)$$

Eliminiere dt für jede Komponente

$$\vec{v}d\vec{p} - \vec{F}d\vec{r} = 0 \quad (87)$$

$$\text{Mit } \vec{p} = m\vec{v} \text{ folgt} \quad (88)$$

$$\frac{\vec{p}d\vec{p}}{m} - \vec{F}d\vec{r} = 0 \quad (89)$$

$$\text{Mit } d(\underbrace{\vec{p}\vec{p}}_{p^2}) = d\vec{p}\vec{p} + \vec{p}d\vec{p} = 2\vec{p} + d\vec{p} \quad (90)$$

$$d\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \vec{F}d\vec{r} = 0 \quad (91)$$

$$\Rightarrow T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (92)$$

Definition der kinetischen Energie.

$dT = d\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2$ drückt die infinitesimale Änderung der kinetischen Energie entlang des Weges aus.

$$dW = \vec{F}d\vec{r} \quad (93)$$

ist die infinitesimale Arbeit entlang des Weges $d\vec{r}$. Gesamtarbeit W , welche Kraft \vec{F} längs der Bahn zwischen den Punkten $\vec{r}(t_0)$ und $\vec{r}(t)$ leistet:

$$W = \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} \vec{F}d\vec{r} \quad (94)$$

Einheit: $1J = 1N m = 1 \frac{kg m^2}{s^2}$

Beachte: Nur die Tangentialkomponente der Kraft trägt zur Arbeit bei!

Potentielle Energie:

$$dT - dW = 0 \text{ mit} \quad (95)$$

$$dV = -dW \quad (96)$$

$$dT + dV = 0 \quad (97)$$

Einheit wie bei der Arbeit: $1J$

Integration $dT + dV = 0$:

$$\int_{\frac{p^2(\vec{r}_0)}{2m}}^{\frac{p^2(\vec{r})}{2m}} d\left(\frac{p^2}{2m}\right) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}d\vec{r} = 0 \quad (98)$$

$$\leadsto \frac{p^2}{2m} \Big|_{\vec{r}(t)} - \frac{p^2}{2m} \Big|_{\vec{r}(t_0)} + (V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0)) = 0 \quad (99)$$

$$\Rightarrow T(\vec{r}) + V(\vec{r}) = T(\vec{r}_0) + V(\vec{r}_0) = E \quad (100)$$

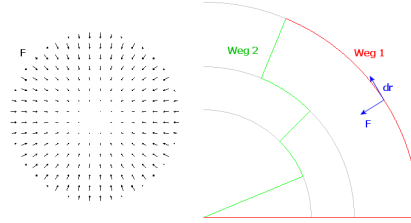
Summe von kinetischer und potentieller Energie bleibt im Falle konservativer Kräfte konstant

4.2 Konservative Kräfte

Zentralkräfte wie Gravitations- und Coulombkraft nennt man **KONSERVATIV**, weil die entlang eines Weges geleistete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt, aber nicht vom Weg abhängt.

$$\vec{F} = F_r \hat{r} \quad (101)$$

Dabei ist \hat{r} der Einheitsvektor in radialer Richtung



Entlang der tangentialen Anteile des Weges wird keine Arbeit geleistet!

$$\vec{F} d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha \quad (102)$$

Dabei ist α der Winkel zwischen \vec{F} und $d\vec{r}$

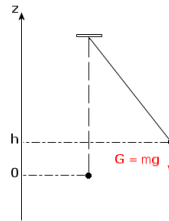
$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F_r dr = \gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (103)$$

für die Gravitationskraft. Nichtkonservative Kräfte sind z.B. Reibungskräfte.

Fazit: $T + V$ nur in konservativen Systemen konstant. Gesamtenergie (thermische, elektrische, etc.) bleibt jedoch in jedem abgeschlossenen System konstant

4.3 Zwei Beispiele

Auslenkung der Masse m aus der Ruheposition \rightarrow Gegen die Gravitationskraft verrichtete Arbeit



$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\vec{g} d\vec{r} = - \int_0^z mg dz = -mgz \quad (104)$$

\Rightarrow Änderung der potentiellen Energie $V(z) - V(0) = mgz$

$$T(z) + V(z) = T(0) + V(0) = E_{ges} \quad (105)$$

$$\underbrace{T(z)} + \underbrace{V(z) - V(0)} = T(0) = E_{ges} \quad (106)$$

$$\frac{1}{2}mv^2(z) + mgz = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = mgh \quad (107)$$

$$\Rightarrow v(z) = \sqrt{2g(h - z)} \quad (108)$$

$$\Rightarrow V_{max} = \sqrt{2gh} \quad (109)$$

\Rightarrow Information über die Geschwindigkeit ohne Anwendung des Aktionsprinzips

Vorzeicheninventio: Wird Arbeit gegen eine Kraft verrichtet, so nimmt die potentielle Energie zu. Verrichtet die Kraft Arbeit, so nimmt die potentielle Energie ab

Feder: Streckung: Gegen Rückstellkraft verrichtete Arbeit

$$W = \int \vec{F}_r dr = - \int_{x_0}^{x_2} C(x - x_0) dx = -\frac{1}{2}C(x_2 - x_0)^2 \quad (110)$$

↪ Potentielle Energie $-W = V = \frac{1}{2}C(x_2 - x_0)^2$. Analog bei Stauchung

$$W = - \int_{x_0}^{x_1} C(x_0 - x) dx = -\frac{1}{2}C(x_1 - x_0)^2 \quad (111)$$

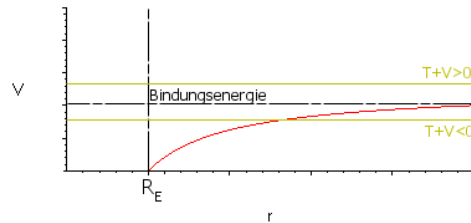
4.4 Potentielle Energie im Schwerfeld, Gesamtenergie und Umlaufbahnen

Arbeit um einen Körper der Masse m von der Erdoberfläche zu einem Punkt \vec{r}_2 zu bringen:

$$\begin{aligned} W &= \int_{R_E}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int -R_E r^2 F dr = - \int_{R_E}^{r_2} \gamma \frac{M_E m}{r^2} = \gamma M_E m \left[\frac{1}{r} \right]_{R_E}^{r_2} \\ &= \gamma M_E m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{R_E} \right) \end{aligned} \quad (112)$$

Änderung der potentiellen Energie:

$$V(r_2) - V(R_E) = \gamma M_E m \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (113)$$



Oft wird die potentielle Energie auf der Erdoberfläche = 0 gesetzt. $V_{max} = mgR_E$ heißt BINDUNGSENERGIE. Ist die kinetische Energie eines Objektes auf der Erdoberfläche geringer als diese Bindungsenergie, so fällt/bleibt Objekt auf/an Erde zurück/gebunden. Fluchtgeschwindigkeit:

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq gmR_E \Rightarrow v = \sqrt{2gR_E} = 11.2 \frac{km}{s} \quad (114)$$

Nullpunkt der potentiellen Energie ist auch anders wählbar. Oft wird z.B. die potentielle Energie im Unendlichen = 0 gesetzt. Arbeit um Masse m von ∞ nach r zu bringen:

$$W = -\gamma M m \int_{\infty}^r \frac{1}{r'^2} dr' = \gamma M m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = \gamma M m \frac{1}{r} \quad (115)$$

$$V(r) = \underbrace{V(\infty)}_{=0} = -\gamma M m \frac{1}{r} \quad (116)$$

$$\rightsquigarrow V(r) = -\gamma M m \frac{1}{r} \quad (117)$$

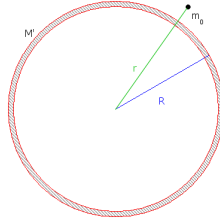
Beispiel Sonne: Potentielle Energie eines Körpers der Masse m im Gravitationsfeld der Sonne (Erde, etc.). Ist die Gesamtenergie eines Körpers

$$E_{ges} = T + V = T - \gamma \frac{Mm}{r} > 0, \quad (118)$$

so wird der Körper nicht gebunden. Ist die Gesamtenergie $E_{ges} < 0 \Rightarrow$ Körper bleibt im Schwerefeld gefangen (auf Ellipsen oder Kreisen). Ist $E_{ges} > 0 \Rightarrow$ Körper bewegt sich auf Hyperbelbahn an M vorbei und entfernt sich wieder

4.5 Gravitationsfeld einer Kugelschale und einer Vollkugel

Ist es gerechtfertigt das Gravitationsfeld der Erde für $r > R_E$ so zu betrachten, als ob es von einem Massepunkt mit der Gesamtmasse der Erde im Zentrum der Kugel ausginge? Antwort: ja



Hohlkugel:

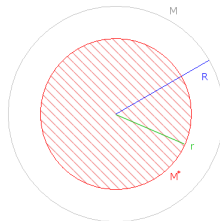
$$r > R \quad \vec{F} = -\gamma \frac{M' m_0}{r^2} \hat{r} \quad (119)$$

$$r < R \quad \vec{F} = 0 \quad (120)$$

Wenn sich m_0 außerhalb der Kugelschale befindet, wirkt die Gravitationskraft so, als ob die gesamte Masse M' im Zentrum konzentriert wäre. Ist m_0 innerhalb der Kugel, übt die Kugelschale keine Kraft auf sie aus.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Gravitationsfeld einer Kugelschale} \quad \vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_0} = -\gamma \frac{M' m_0}{r^2} \hat{r} \\ \text{Gravitationsfeld einer Vollkugel} \quad \vec{g} = -\gamma \frac{M}{r^2} \hat{r} \end{array} \right\} r > R \quad (121)$$

$M =$ Gesamtmasse = Summe der Kugelschalenmassen M'



Gravitationsfeld innerhalb der Vollkugel:

$$\frac{M^*}{M} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow M^* = \frac{r^3}{R^3} M \quad (122)$$

Gravitationsfeldstärke bei r :

$$g(r) = -\gamma \frac{M^*}{r^2} = -\gamma \frac{r^3 M}{R^3 r^2} = -\gamma \frac{M}{R^3} r, \quad r < R \quad (123)$$

ÄQUIPOTENTIALFLÄCHEN: Flächen (mit gleicher) konstanter potentieller Energie im Gravitationsfeld einer Kugel sind konzentrische Kugelflächen um den Mittelpunkt.

Zusammenhang zwischen Kraft und potentieller Energie:

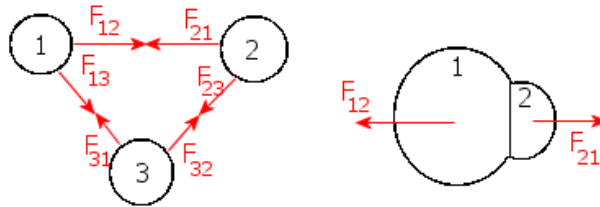
$$\vec{F} = -\text{grad } V = -\nabla V = \left(-\frac{dV}{dx}, -\frac{dV}{dy}, -\frac{dV}{dz} \right) \quad (124)$$

4.6 Impulserhaltung und Stoßprozesse

Impulserhaltung ist Konsequenz des dritten Newton'schen Gesetzes $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$$\sum_{i,k, i \neq k} \vec{F}_{ik} = 0 \tag{125}$$

Kräfte heben sich paarweise auf, z.B. auch beim Stoß



Am Beispiel zweier Teilchen:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \rightsquigarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \tag{126}$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \tag{127}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const \tag{128}$$

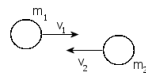
Allgemein:

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \vec{P} = const \text{ Impulssatz} \tag{129}$$

Dabei ist \vec{P} der resultierende Implus. Der Gesamtimpuls eines beliebigen Systems von N Massenpunkten bleibt unter dem Einfluß **innerer** Kräfte konstant. **INNERE KRÄFTE:** Nur Wechselwirkung zwischen den N Teilchen, keine Kräfte von außen.

4.7 Stoßprozesse

$\sum_i \vec{p}_i \Rightarrow$ Gesamtimpuls vor dem Stoß = Gesamtimpuls nach dem Stoß



$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \tag{130}$$

mit \vec{v}'_1 und \vec{v}'_2 Geschwindigkeiten nach dem Stoß.

Sonderfall (Zentraler Stoß): Teilchen bewegen sich vor und nach dem Stoß auf der gleichen Geraden

Was kann man über kinetische Energie sagen?

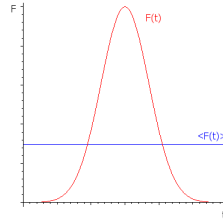
Fall A Kinetische Energie bleibt beim Stoß erhalten

$$T = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{(p'_1)^2}{2m_1} + \frac{(p'_2)^2}{2m_2} = T' \tag{131}$$

Fall B Teil der kinetischen Energie wird in andere Energieformen umgewandelt, z.B. Reibung, Verformung, ...

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{(p'_1)^2}{2m_1} + \frac{(p'_2)^2}{2m_2} + Q \tag{132}$$

$Q = 0$: elastische Streuung/Stoß, $Q \neq 0$: inelastischer Stoß



Zum Stoßprozess: Zeitlicher Verlauf der Kraft, die ein Körper auf einen anderen ausübt

$$\text{Kraftstoß } d\vec{p} = \vec{F} dt \quad (133)$$

$$\rightsquigarrow \int_{\vec{p}_a}^{\vec{p}_e} d\vec{p} = \int_{t_a}^{t_e} \vec{F}(t) dt \quad (134)$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\vec{p}_e - \vec{p}_a}_{\Delta p} = \int_{t_a}^{t_e} \vec{F}(t) dt = \langle F(t) \rangle (t_e - t_a) = \langle F(t) \rangle \Delta t \quad (135)$$

Δp : Impulsübertragung, $\langle F(t) \rangle$: zeitliches Mittel der Kraft

Beispiel 1 Der vollkommen unelastische Stoß: Körper bleiben nach dem Stoß aneinander "kleben"

$$m_1 \vec{v} = m_1 \vec{v}' + m_2 \vec{v}' \rightsquigarrow \vec{v}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v} \quad (136)$$

Beispiel 2 Der vollkommen elastische Stoß in einer Dimension

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (137)$$

+ Erhaltung der kinetischen Energie beim elastischen Stoß

$$\frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 = \frac{m_1}{2} (v_1')^2 + \frac{m_2}{2} (v_2')^2 \quad (138)$$

$$\frac{m_1}{2} (v_1^2 - (v_1')^2) = \frac{m_2}{2} ((v_2')^2 - v_2^2) \quad (139)$$

$$\frac{m_1}{2} (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = \frac{m_2}{2} (v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \quad (140)$$

Aus Impulserhaltung

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \quad (141)$$

Dividiere (140) durch (141)

$$\frac{1}{2} (v_1 + v_1') = \frac{1}{2} (v_2' + v_2) \quad (142)$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = v_2' - v_1' = -(v_1' - v_2') \quad (143)$$

4.8 Gesamtimpuls eines Systems mit äußeren Kräften

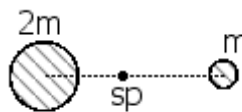
4.8.1 Massenmittelpunkt

$$m_{ges} \vec{r}_{sp} = \sum_i m_i \vec{r}_i \rightsquigarrow \vec{r}_{sp} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m_{ges}} \quad (144)$$

für kontinuierliche Massenverteilung

$$\vec{r}_{sp} = \frac{1}{m_{ges}} \int_V \vec{r} dm \quad (145)$$

Beispiel: $i = 2$



$$\vec{r}_{sp} = \frac{0 * 2m + x_1 * m}{3 * m} = \frac{1}{3} x_1 \quad (146)$$

4.8.2 Bewegung des Massmittelpunktes

$$m_{ges} \frac{d\vec{v}_{sp}}{dt} = m_{ges} \vec{a}_{sp} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_a \quad (147)$$

Ohne äußere Kräfte gilt:

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i = 0 \quad (148)$$

Der Massenschwerpunkt eines Systems von Massen bewegt sich so als ob die Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt wäre und die Summe aller Kräfte dort angreifen würde

4.8.3 Der Massenmittelpunkt als Bezugssystem

Im Laborsystem

$$\vec{v}_{sp} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (149)$$

Schwerpunktsystem bewegt sich mit dem Schwerpunkt der beiden Massen. Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{sp} \quad (150)$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{sp} \quad (151)$$

$$\vec{P}_{sp} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow m_1 \vec{u}_1 = -m_2 \vec{u}_2 \quad (152)$$

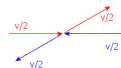
$$\Rightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad (153)$$

Im Schwerpunktsystem ist die Summe der Impulse vor und nach dem Stoß Null. Dies erleichtert die Behandlung aller Stoßprobleme.

Stoß zweier beliebiger Massen m_1 und m_2 : Winkel hängt vom Detail des Stoßprozesses ab. Bei elastischem Stoß ($Q = 0$) haben alle Vektoren die gleiche Länge. Nach dem Stoß gilt wieder $\vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2$.

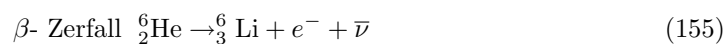
Beispiel: Elastische Proton-Proton-Streuung. Beide Teilchen haben gleiche Masse \Rightarrow nach dem Stoß schließen die Teilchenbahnen einen 90°-Winkel ein. **Im Laborsystem** bewegt sich Proton 1 mit der Geschwindigkeit $+\vec{v}$ auf ruhendes Proton zu. Schwerpunkt bewegt sich mit

$$\vec{v}_{sp} = \frac{m\vec{v} + m\vec{0}}{2m} = \frac{1}{2}\vec{v} \quad (154)$$

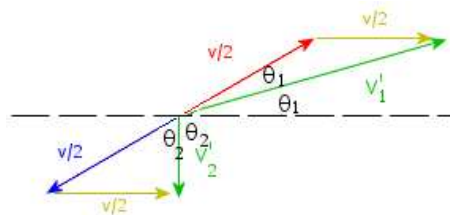


Im Schwerpunktsystem: Elastischer Zusammenstoß. Beide Teilchen haben in diesem System vor und nach dem Stoß die gleiche Geschwindigkeit

Beispiel: Neutrino (im Laborsystem)



Ausgangssituation: Ruhender Kern (He) $\Rightarrow \vec{p} = 0$. Nach dem Zerfall: Gesamtimpuls sollte Null sein, Teilchen müssten in entgegengesetzter Richtung wegfliegen. Wird im Experiment nicht beobachtet \rightarrow weiteres Teilchen (Neutrino) muss beteiligt sein



$$2\theta_1 + 2\theta_2 = 180^\circ \quad (156)$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \quad (157)$$

5 Die rotierende Bewegung

Bisher: Massenpunkt auf Kreisbahn. Jetzt: Rotation eines ausgedehnten Körpers um seine Achse.

Beispiel: Neutronensterne, molekulare Rotoren, Räder.

Ziel: Rotationsvorgänge durch die Einführung einiger neuer Begriffe übersichtlich darzustellen

5.1 Drehimpulserhaltung für einen Massenpunkt

5.1.1 Drehmoment und Drehimpuls

$$\text{Newton: } \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (158)$$

Körper mit Masse m bewegt sich unter dem Einfluß einer Kraft \vec{F} mit der Geschwindigkeit \vec{v} in der xy -Ebene.

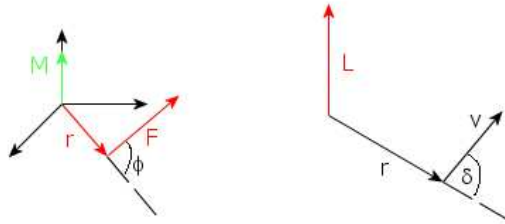
$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{M} \quad \text{Drehmoment} \quad (159)$$

Betrachte

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (160)$$

$$\leadsto \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (161)$$

$$\leadsto \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (162)$$



DREHMOMENT: Vektor vom Betrag $rF \sin \phi$, der senkrecht zu \vec{r} und \vec{F} steht

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (163)$$

DREHIMPULS: Vektor vom Betrag $rp \sin \delta$, der senkrecht zu \vec{r} und \vec{v} , \vec{p} steht

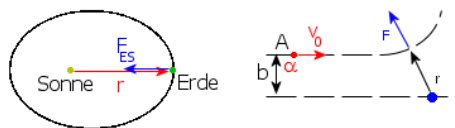
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (164)$$

Bemerkung: Wird der Drehimpuls auf einen anderen Punkt P' bezogen, so hat er einen anderen Wert, obwohl Impuls und Richtung des Teilchens unverändert bleiben.

5.1.2 Die Erhaltung des Drehimpulses beim Wirken einer Zentralkraft

Bei passender Wahl des Ursprungs tritt für alle Bewegungen eines Körpers unter dem Einfluß einer Zentralkraft kein Drehmoment auf

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{ES} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const} \quad (165)$$



Beispiel: Rutherford- Streuung

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const} \quad (166)$$

$$\text{Kraft: } \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (167)$$

Drehimpuls am Punkt A: $L = mv_o b$

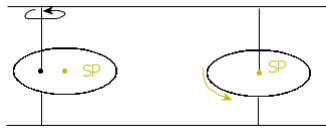
Drehimpulserhaltung ist ein weiteres wichtiges Invarianzprinzip der Physik.
(Bisher: Energie- und Impulserhaltung)

5.2 Drehimpulserhaltung in einem System von Massepunkten

5.2.1 Bewegung des Massenschwerpunktes

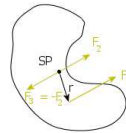
Ein beliebig geformtes System - ohne äußere Kräfte - kann sich nur um Achsen drehen, die durch den Schwerpunkt gehen, weil

$$m_{ges} \frac{d^2 \vec{r}_{ges}}{dt^2} = \vec{F}_a \quad (168)$$



Im linken Fall: auf Lager werden Kräfte ausgeübt

Sind die Massepunkte **starr** miteinander verbunden, spricht man von STARREN KÖRPERN. Versucht man einen starren Körper um eine Achse zu drehen, die nicht durch den Schwerpunkt geht, dann treten Kräfte auf. Beim starren Körper wird die Translations- und Rotationsbewegung bestimmt durch den Angriffspunkt der Kraft. Kräftepaare \vec{F}_1 und \vec{F}_3 bewirken keine Beschleunigung des Schwerpunktes, aber Rotation. \vec{F}_2 bewirkt Schwerpunktsbeschleunigung.



5.2.2 Drehimpulserhaltung in einem System von Massepunkten

Aktionsprinzip für Körper 1:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_1^{\text{ext}} = m_1 \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (169)$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{13} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1^{\text{ext}} = \vec{r}_1 \times m_1 \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (170)$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{23} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2^{\text{ext}} = \vec{r}_2 \times m_2 \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (171)$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_{31} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{32} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3^{\text{ext}} = \vec{r}_3 \times m_3 \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (172)$$

addiere und benutze dass $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$:

$$\underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}}_{=0} + \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_{13}}_{=0} + \underbrace{(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_{23}}_{=0} + \sum_{j=1}^3 3\vec{r}_j \times \vec{F}_j^{\text{ext}} \quad (173)$$

$$= \sum_{j=1}^3 m_j \vec{r}_j \times \frac{d\vec{v}_j}{dt} \quad (174)$$

$$\rightsquigarrow \sum_{j=1}^3 \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j \quad (175)$$

Dies ist für beliebig viele Massen N gültig.
Gesamtdrehmoment und -impuls

$$\vec{M} = \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{\text{ext}} \quad (176)$$

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j \quad (177)$$

$$\rightsquigarrow \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (178)$$

Der Gesamtdrehimpuls eines Systems kann nur durch ein von außen wirkendes Drehmoment verändert werden. Wenn keine äußeren Kräfte wirken ($\vec{F}_j^{\text{ext}} = 0$) $\rightsquigarrow \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$
Drehimpulserhaltung bei Abwesenheit äußerer Kräfte.

Beispiel: Schwerpunktbestimmung

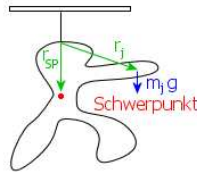
$$\vec{M} = \sum_j \vec{r}_j \times m_j \vec{g} = -\vec{g} \times \sum_j m_j \vec{r}_j = -\vec{g} \times \vec{r}_{\text{SP}} \sum_j m_j \quad (179)$$

Definition des Schwerpunktes:

$$\vec{r}_{\text{SP}} = \frac{\sum_j \vec{r}_j m_j}{\sum_j m_j} \quad (180)$$

\rightsquigarrow stabile Aufhängung (= kein Drehmoment!) nur wenn $\vec{r}_{\text{SP}} \parallel \vec{g}$

\rightsquigarrow Rezept um Schwerpunkt zu bestimmen

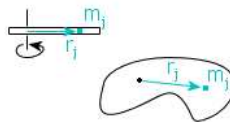


5.3 Der Drehimpuls starrer Körper

Beim starren Körper umkreisen alle seine Teile die Drehachse mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit. Zunächst beschrieben Rotation einfach symmetrischer Körper, bei denen der Drehimpuls parallel zur Winkelgeschwindigkeit steht.

5.3.1 Drehimpuls einer rotierenden Platte

Frage: Wie groß ist der Drehimpuls \vec{L} einer Platte, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse senkrecht zur Platte dreht?



Für jedes m_j gilt: Da $\vec{r}_j \times \vec{v}_j$ senkrecht auf der Platte steht, ist $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$. Element m_j beschreibt Kreisbahn:

$$|\vec{r}_j \times \vec{v}_j| = r_j v_j = r_j^2 \omega, \text{ wobei } \vec{v}_j \perp \vec{r}_j \quad (181)$$

\rightsquigarrow Wir kennen Betrag und Richtung von \vec{L} :

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j = \underbrace{\sum_{j=1}^N m_j r_j^2}_{=I \text{ Trägheitsmoment}} \vec{\omega} \quad (182)$$

TRÄGHEITSMOMENT für eine bestimmte Drehachse: Maß für den Widerstand, den ein Körper einer Änderung seiner Drehbewegung entgegensetzt:

$$I_6 = \sum_{j=1}^N m_j r_j^2 \quad (183)$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (184)$$

Dreht man eine Platte um eine beliebige dazu senkrechte Achs, so ist der Drehimpuls immer parallel zu $\vec{\omega}$

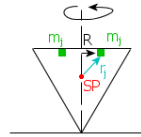
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \underbrace{\frac{dI}{dt}}_{=0} \vec{\omega} + I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (185)$$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ist die Winkelbeschleunigung.

Vergleich:	Drehbewegung	lineare Bewegung
	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
	$\vec{L} = I\vec{\omega}$	$\vec{p} = m\vec{v}$
	$\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

5.3.2 Drehimpuls eines rotationssymmetrischen Körpers...

... am Beispiel eines Kinderkreiseln, der sich um seine vertikale Symmetrieachse dreht. Zu jeder Teilmasse m_j am Ort \vec{r}_j gibt es aufgrund der Symmetrie eine Teilmasse m'_j am Ort \vec{r}'_j . Die beiden lassen sich durch Drehung um 180° ineinander überführen. Beitrag der beiden Massen zum Drehimpuls:



$$\vec{L}_j = m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j + m'_j \vec{r}'_j \times \vec{v}'_j \quad (186)$$

$$\text{mit } \vec{v}_j = -\vec{v}'_j \text{ und } m_j = m'_j \quad (187)$$

$$\leadsto \vec{L}_j = m_j (\vec{r}_j - \vec{r}'_j) \times \vec{v}_j = 2m_j \vec{R}_j \times \vec{v}_j \quad (188)$$

Betrag des Drehimpulses:

$$2m_j \left| \vec{R}_j \times \vec{v}_j \right| = 2m_j R_j v_j = 2m_j R_j^2 \omega \quad (189)$$

\leadsto Gesamtdrehimpuls durch Summation über alle Massen:

$$\vec{L} = \underbrace{\sum_{j=1}^N m_j R_j^2}_{I} \omega \quad (190)$$

Wenn sich ein rotationssymmetrischer Körper um seine Symmetrieachse dreht, so sind \vec{L} und $\vec{\omega}$ parallel.

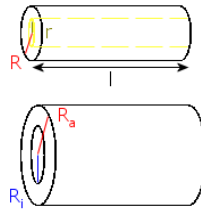
5.3.3 Berechnung des Trägheitsmoments

$$I = \sum_{j=1}^N m_j r_j^2 \xrightarrow{\text{Übergang}} I = \int r^2 dm \quad (191)$$

- Vollzylinder: Dichte $\rho = \frac{dm}{dV}$, $dm = \rho dV = \rho 2\pi r dr l$

$$\leadsto I = \int r^2 dm = \int_0^R \rho 2\pi l r^3 dr = 2\pi \rho l \frac{R^4}{4} \quad (192)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\pi R^2 \rho l}_{=m_{ges}} R^2 = \frac{1}{2} m_{ges} R^2 \quad (193)$$



- Hohlzylinder:

$$I = \int r^2 dm = \int_{R_i}^{R_a} \rho l 2\pi r^3 dr = 2\pi \rho l \frac{1}{4} [r^4]_{R_i}^{R_a} \quad (194)$$

$$= \frac{1}{2} \pi \rho l (R_a^4 - R_i^4) = \frac{1}{2} \pi \underbrace{(R_a^2 - R_i^2)}_{m_{ges}} \rho l (R_a^2 + R_i^2) \quad (195)$$

$$= \frac{1}{2} m_{ges} (R_i^2 + R_a^2) \quad (196)$$

Bemerkung: $R_i \rightarrow R_a \Rightarrow I = m_{ges} R_a^2$ ist das Trägheitsmoment des Zylindermantels

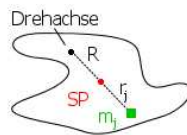
5.3.4 Steiner'scher Satz

Oft benötigt man das Trägheitsmoment I um eine zur Schwerpunktsachse im Abstand R parallele Achse:

$$I = \sum_j m_j r_j^2 = \sum_j m_j (\vec{R} + \vec{r}_{sj})^2 \quad (197)$$

$$= \underbrace{\sum_j m_j R^2}_{m_{ges} R^2} + \underbrace{\sum_j m_j r_{sj}^2}_{I_s} + 2 \sum_j m_j \vec{R} \vec{r}_{sj} \quad (198)$$

$$= m_{ges} R^2 + I_s + 2 \vec{R} \underbrace{\sum_j m_j \vec{r}_{sj}}_{\propto \vec{r}_{sp}=0} \quad (199)$$



Dabei ist I_s das Trägheitsmoment um die Schwerpunktsachse. STEINERSCHER SATZ:

$$I = m_{ges} R^2 + I_s \quad (200)$$

5.3.5 Drehimpuls eines beliebig geformten Körpers

Bei den bisherigen Beispielen galt, dass $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$. Einfaches Gegenbeispiel:

$$\vec{L} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2; \quad \vec{v}_1 = -\vec{v}_2, \quad \vec{r}_1 = -\vec{r}_2 \quad (201)$$

$\leadsto \vec{L}$ steht senkrecht auf \vec{r}_i und $\vec{v}_i \leadsto$ Winkel zwischen \vec{L} und $\vec{\omega}$ beträgt $90^\circ - \alpha$.

Bemerkung: Der Drehimpuls ändert laufend seine Richtung. Äußere Kräfte müssen vom Drehlager aufgebracht werden.

Fazit: Im Allgemeinen sind \vec{L} und $\vec{\omega}$ über den TRÄGHEITSTENSOR verknüpft:

$$\vec{L} = \tilde{I} \vec{\omega} \quad (202)$$

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (203)$$

Ableitung:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \quad (204)$$

$$= \sum_i m_i (r_i^2 \vec{\omega} - \langle \vec{r}_i, \vec{\omega} \rangle \vec{r}_i) = \sum_i m_i (r_i^2 \tilde{\mathbb{E}} - \vec{r}_i \vec{r}_i) \vec{\omega} \quad (205)$$

mit der Einheitsmatrix $\tilde{\mathbb{E}}$ und der Dyade $\vec{r}_i \vec{r}_i$. In Integralform:

$$\vec{L} = \int (r^2 \tilde{\mathbb{E}} - \vec{r}_i \vec{r}_i) dm \vec{\omega} \quad (206)$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) = R \quad (207)$$

$$\begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \quad (208)$$

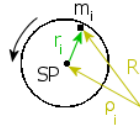
I_{yy} ist dann $\int (x^2 + z^2) dm$.

Man kann zeigen: Für jeden noch so komplizierten Körper gibt es genau 3 aufeinander senkrecht stehende Drehachsen, die sich dadurch auszeichnen, dass bei einer Rotation um diese Achsen \vec{L} parallel zu $\vec{\omega}$ ist \rightarrow HAUPTTRÄGHEITSACHSEN:

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix} \quad (209)$$

5.4 Die Energie eines starren Rotors

Kinetische Energie eines Körpers, der sich fortbewegt und gleichzeitig um seinen Schwerpunkt um eine Hauptträgheitsachse rotiert ($\vec{L} \parallel \vec{\omega}$)

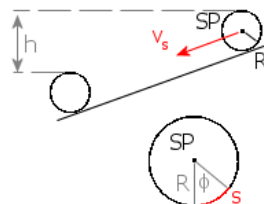


$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\rho_i}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{d}{dt} (\vec{R} + \vec{r}_i) \right)^2 \quad (210)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)^2}_{=\frac{1}{2} m_{ges} \vec{v}_{sp}^2} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2}_{=\frac{1}{2} \sum_i m_j r_j^2 \omega^2} + \underbrace{\sum_i m_i \frac{d\vec{R}}{dt} \frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{=\frac{d\vec{R}}{dt} \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i} \quad (211)$$

$$\rightarrow T = \underbrace{\frac{1}{2} m_{ges} \vec{v}_{sp}^2}_{(*)} + \underbrace{\frac{1}{2} I \omega^2}_{(**)} \quad (212)$$

(*): kinetische Energie des Schwerpunktes, (**): Rotationsenergie des Schwerpunktes



Beispiel: rollender Zylinder. Schwerpunktschwindigkeit $v_s = R\omega$
zurückgelegter Weg $s = R\phi =$ Weg, den der Schwerpunkt zurückgelegt hat

$$\Rightarrow v_s = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\phi}{dt} = R\omega \quad (213)$$

Mit $v_s^0 = 0$ und Energieerhaltung:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}I \frac{v_s^2}{R^2} \quad (214)$$

$$v_s = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}}} \quad (215)$$

$$\text{Vollzylinder } I = \frac{1}{2}mR^2 \rightsquigarrow v_s = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \quad (216)$$

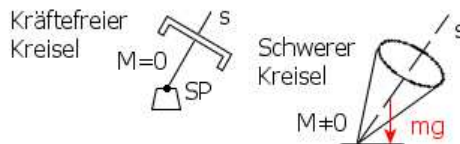
$$\text{Zylindermantel } I = mR^2 \rightsquigarrow v_s = \sqrt{gh} \quad (217)$$

5.5 Der symmetrische Kreisel

Rotationsbewegung von starren Körpern um freie Achsen. Ist im Schwerpunkt gelagert. Kein Drehmoment greift am Aufstützpunkt an.

5.5.1 Kräftefreier Kreisel

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (218)$$

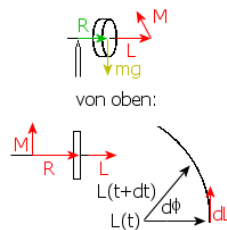


Versetzt man den Kreisel so in Rotation, dass er um seine FIGURENACHSE rotiert, dann liegt auch \vec{L} in Richtung von ω und \vec{s} . Stört man die Parallelität von $\vec{\omega}$ und \vec{s} , z.B. durch Schlag, so bewegen sich \vec{s} und $\vec{\omega}$ auf Kegelmänteln um die raumfeste \vec{L} - Achse \rightarrow NUTATION

5.5.2 Der Kreisel unter dem Einfluss eines Drehmoments

\rightsquigarrow führt zu PRÄZSSIONSBEWEGUNG senkrecht zu \vec{R} und \vec{g} .

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (219)$$

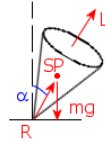


da $\vec{M} \perp \vec{L}$ steht auch $d\vec{L} \perp \vec{L} \rightsquigarrow$ Betrag von \vec{L} ändert sich nicht. \vec{L} beschreibt eine Kreisbahn mit Frequenz

$$\frac{dL}{dt} = \underbrace{\frac{d\phi}{dt}}_{\omega_p} L \quad (220)$$

$$\rightsquigarrow \omega_p = \frac{M}{L} \quad (221)$$

Beispiel: Kinderkreisel. Drehimpulsachse weicht wieder in Richtung des Drehmoments aus:

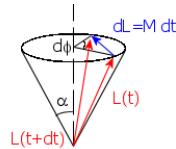


$$d\vec{L} = \vec{M}dt \quad (222)$$

- $d\vec{L}$ steht senkrecht auf $\vec{L} \rightsquigarrow |\vec{L}|$ bleibt konstant
- $d\vec{L}$ steht senkrecht auf $m\vec{g}$, d.h. $d\vec{L}$ bewegt sich in einer horizontalen Ebene \rightsquigarrow Endpunkt von \vec{L} beschreibt Kreis \rightsquigarrow Präzessionsfrequenz

$$\frac{dL}{dt} = L \sin \alpha \underbrace{\frac{d\phi}{dt}}_{\omega_p} \quad (223)$$

$$\rightsquigarrow \omega_p = \frac{Rmg \sin \alpha}{L \sin \alpha} = \frac{Rmg}{L} \quad (224)$$



BEISPIEL: Kreiselkompass: Beim gefesselten Kreisel wird die Drehachse A mit Erdrotation mitgeführt \rightsquigarrow bewirkt Drehmoment in Zeichenebene \rightsquigarrow Figurenachse dreht in Nord- Süd-Richtung

5.6 Die kleinste Einheit des Drehimpulses in der Natur

Quantenmechanik: Drehimpulse können nur in halb- und ganzzahligen Vielfachen einer fundamentalen Grundeinheit auftreten. Grundeinheit des Drehimpulses ist die PLANCKSCHE KONSTANTE

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 * 10^{-34} \frac{kg m^2}{s^2} \quad (225)$$

Beispiel: Wasserstoffatom

$$|\vec{F}| = m|\vec{a}| \quad (226)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (227)$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2 r = m^2 v^2 r^2 \frac{1}{m} = \frac{L^2}{m} = \frac{n^2 \hbar^2}{m}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (228)$$

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2} = n^2 r_B \quad \text{mit } r_B = 0.529 * 10^{-10} m \quad (229)$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r} \quad (230)$$

Potentielle Energie:

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad (231)$$

\rightsquigarrow Gesamtenergie:

$$E = T + V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r} \quad (232)$$

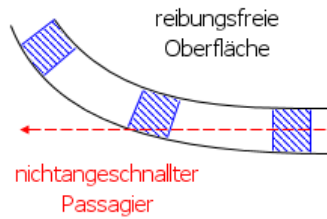
Setze erlaubte Werte $r = r_n$ ein:

$$E_n = -\frac{me^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = R_y \frac{1}{n^2}, \quad R_y = 13.6 eV = 2.17 * 10^{-18} J \quad (233)$$

Dabei ist R_y die Rydbergenergie.

5.7 Scheinkräfte im rotierenden Bezugssystem

In einem beschleunigten Bezugssystem gilt das Newton'sche $\vec{F} = m\vec{a}$ nicht mehr. Ruhender Beobachter außerhalb des Zuges: Passagier bewegt sich gleichförmig geradlinig weiter.



Angeschnallter Passagier im Zug: Beobachtet, dass Passagier links aus dem Zug gezogen wird. Diese Scheinkraft existiert nur für Beobachter in beschleunigten Systemen.

leadsto In rotierenden Bezugssystemen muss man 2 Scheinkräfte einführen, um die Newton'schen Kräfte zu "retten".

Betrachte 2 Bezugssysteme (x, y, z) und (x', y', z') mit gemeinsamen Ursprung. Das System (x', y', z') rotiere mit konstantem ω um eine Drehachse durch den gemeinsamen Ursprung. Der Massepunkt kann in beiden Systemen beschrieben werden, wobei gilt $\vec{r} = \vec{r}'$. $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ sowie $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ sind Einheitsvektoren der beiden Systeme. Und mit $\vec{r} = \vec{r}'$ folgt für die Bewegung eines Massepunktes:

$$x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} = x'(t)\hat{x}' + y'(t)\hat{y}' + z(t)\hat{z}' \quad (234)$$

Ableitung nach der Zeit:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} \quad (235)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{z} \quad (236)$$

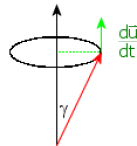
$$\quad (237)$$

$$\vec{v} = \frac{dx'}{dt}\hat{x}' + \frac{dy'}{dt}\hat{y}' + \frac{dz'}{dt}\hat{z}' + x'\frac{d\hat{x}'}{dt} + y'\frac{d\hat{y}'}{dt} + z'\frac{d\hat{z}'}{dt} \quad (238)$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d^2x'}{dt^2}\hat{x}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{y}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{z}'}_{\vec{a}'}} + 2 \left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{x}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{y}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{z}'}{dt} \right) \quad (239)$$

$$+ \underbrace{\left(x'\frac{d^2\hat{x}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\hat{y}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\hat{z}'}{dt^2} \right)}_{(*)}$$

\vec{a}' = Beschleunigung im (x', y', z') - System. Beschleunigung im rotierenden Bezugssystem unterscheidet sich vom nichtrotierenden durch 2 zusätzliche Terme \rightsquigarrow Scheinkräfte.



Wir benötigen noch: zeitliche Ableitungen der Einheitsvektoren \rightsquigarrow Siehe Kreisbewegung:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u} \quad (240)$$

$$\left| \frac{d\hat{u}}{dt} \right| = |\vec{v}| = \omega u \sin \gamma \quad (241)$$

Betrachtet man stat \hat{u} Einheitsvektor \hat{x}' und Vektor $\frac{d\hat{x}'}{dt}$, so kann man schreiben:

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}' \quad (242)$$

$$\frac{d^2\hat{x}'}{dt^2} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \hat{x}') \quad (243)$$

Damit können wir (*) umformen:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \underbrace{\left(\frac{d\hat{x}'}{dt} \hat{x}' + \frac{d\hat{y}'}{dt} \hat{y}' + \frac{d\hat{z}'}{dt} \hat{z}' \right)}_{\vec{v}'} + (x'(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \hat{x}')) \quad (244)$$

$$+ y'(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \hat{y}')) + z'(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \hat{z}')) \\ = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \underbrace{(x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}')}_{\vec{r}'}) \quad (245)$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

Wirkt auf einen Körper der Masse m im System (x, y, z) eine Kraft $\vec{F} = m\vec{a}$, so stellt ein Beobachter im rotierenden System (x', y', z') eine Kraft

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = \vec{F} - \underbrace{2m(\vec{\omega} \times \vec{v}')}_{\text{Coriolis-Kraft}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}} \quad (246)$$

Corioliskraft \vec{F}'_c tritt nur auf, wenn sich ein Körper im rotierenden System bewegt.

Beispiele: Corioliskraft

- Foucault'sches Pendel
- Drehsinn von Tiefdruckgebieten:
Corioliskraft lenkt Winde auf der Nordhalbkugel nach rechts, auf der Südhalbkugel nach links ab \rightsquigarrow auf Nordhalbkugel wird ein Tiefdruckgebiet linksdrehend auf der Südhalbkugel rechtsdrehend umströmt.

Annahme: \vec{v} horizontal in Richtung Norden

$$\vec{F}'_c = -2m(\omega_{\perp} \times \vec{v}') \quad (247)$$

Alle horizontalen Bewegungen auf der nordhalbkugel führen zu einer Rechtsablenkung. Betrag der Corioliskraft ist parallel zur Erdoberfläche

$$\vec{F}'_c = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}_n) \quad (248)$$

$$\rightsquigarrow F'_c = 2m\omega_{\perp} \sin \alpha v_{\parallel} \quad (249)$$

mit der geographischen Breite α

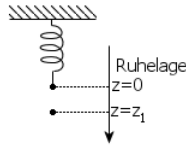
6 Schwingungen

6.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

Hook'sches Gesetz:

$$F = -Cz = m \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (250)$$

$$\rightarrow m \frac{d^2 z}{dt^2} + Cz = 0 \quad (251)$$



Allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung:

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (252)$$

$z(t)$: Auslenkung zur Zeit t , A : Amplitude, $\omega_0 t$: Phase, ϕ : Phasenwinkel

Der genaue zeitliche Verlauf von $z(t)$ wird durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

Beispiel: m wird nach unten ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen $\leadsto z(t=0) = z_1$ und $\frac{dz}{dt}(t=0) = 0$

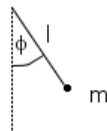
$$\leadsto \begin{cases} A \cos \phi = z_1 \\ \omega_0 A \sin \phi = 0 \\ A = z_1 \end{cases} \quad (253)$$

Erst aus den Anfangsbedingungen ergeben sich spezielle Werte für A und ϕ .

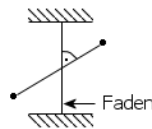
Beispiele für harmonische Oszillatoren:

•

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \phi = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \phi(t) = \phi_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (254)$$



• Torsionspendel



$$M = \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2 \phi}{dt^2} \quad (255)$$

$$I \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -D\phi \quad (256)$$

$$I \frac{d^2 \phi}{dt^2} + D\phi = 0 \quad \text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}} \quad (257)$$

Rückstellmoment $M_R = -D\phi$, D : Torsionskonstante

6.2 Freie gedämpfte Schwingung

In 6.1 hatten wir keine Reibung bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen berücksichtigt. Reibungskräfte wirken der Richtung der Geschwindigkeit entgegen und sind oft proportional zur Geschwindigkeit (z.B. bei Flüssigkeiten)

$$\vec{F}_R = -\gamma \vec{v}, \quad \gamma: \text{Reibungskoeffizient} \quad (258)$$

Für unser Federpendel ergibt sich dann

$$m \frac{dz^2}{dt^2} = -Cz - \gamma \frac{dz}{dt} \quad (259)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dz}{dt} + \underbrace{\frac{C}{m}}_{\omega_0^2} z = 0 \quad (260)$$

Bewegung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0 \quad (261)$$

$$\leadsto z(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi) \quad (262)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi) - Ae^{-\beta t} \omega \sin(\omega t + \phi) \quad (263)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} &= \beta^2 Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi) + 2\beta Ae^{-\beta t} \omega \sin(\omega t + \phi) \\ &\quad - Ae^{-\beta t} \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (264)$$

eingesetzt in Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} Ae^{-\beta t} (\beta^2 \cos(\omega t + \phi) + 2\beta \omega \sin(\omega t + \phi) - \omega^2 \cos(\omega t + \phi)) \\ - \frac{\gamma}{m} \beta \cos(\omega t + \phi) - \frac{\gamma}{m} \omega \sin(\omega t + \phi) + \omega_0^2 \cos(\omega t + \phi) = 0 \end{aligned} \quad (265)$$

$$Ae^{-\beta t} \left(\cos(\omega t + \phi) \left[\beta^2 - \omega^2 - \frac{\gamma \beta}{m} + \omega_0^2 \right] + \sin(\omega t + \phi) \left[2\beta \omega - \frac{\gamma}{m} \beta \omega \right] \right) = 0 \quad (266)$$

Gleichung kann für alle Zeiten nur gelten, wenn [...] - Terme 0 sind

$$\leadsto \frac{\gamma}{m} = 2\beta \quad (267)$$

$$\beta^2 - \omega^2 - \underbrace{\frac{\gamma}{m} \beta + \omega_0^2}_{2\beta^2} = 0 \quad (268)$$

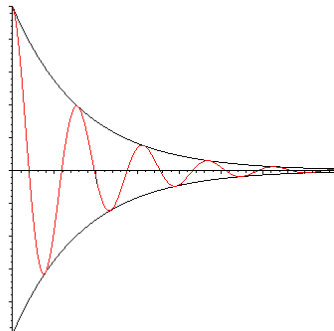
$$\rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \quad (269)$$

Die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung ist kleiner als die der ungedämpften. Abhängig von der Dämpfung der Schwingung (Parameter β) können 3 Fälle unterschieden werden.

1. $\beta < \omega_0 \leadsto \omega > 0$: gedämpfte Schwingung

$$z(t) = Ae^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \phi\right), \quad \omega < \omega_0 \leadsto T > T_0 \quad (270)$$

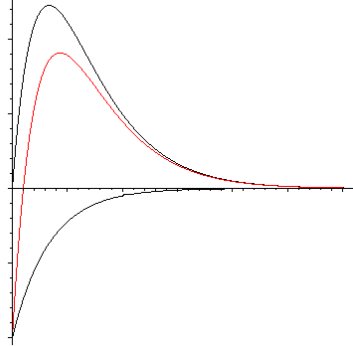
Schwingungsamplitude klingt exponentiell ab



2. $\beta = \omega_0 \rightsquigarrow \omega = 0 \rightsquigarrow Ae^{-\beta t} \cos \phi = A'e^{-\beta t}$. Es zeigt sich, dass in diesem Spezialfall auch $z(t) = Bte^{-\beta t}$ eine Lösung ist. **Beweis:** Setze in Differentialgleichung ein. Lösung für alle Zeiten t , wenn $\beta = \omega_0$.

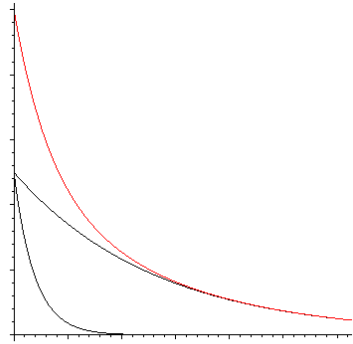
$$z(t) = (A' + Bt)e^{-\beta t} \quad (271)$$

APERIODISCHER KRIECHFALL



3. $\beta > \omega_0 \rightsquigarrow \omega^2 < 0 \rightsquigarrow \omega$ imaginär. Lösung der Differentialgleichung lautet (\rightarrow Maple)

$$z(t) = A_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} \quad (272)$$



Wie kommt man von dieser Lösung zu Lösungen für $\omega_0 > \beta$ (Fall 1)?

$$z(t) = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t} \quad (273)$$

$$k_{1/2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (274)$$

$$z(t=0) = A_1 + A_2 = z_0 \quad (275)$$

$$\dot{z}(t=0) = [A_1 k_1 e^{k_1 t} + A_2 k_2 e^{k_2 t}]_{t=0} = A_1 k_1 + A_2 k_2 = v_0 \quad (276)$$

$\rightsquigarrow A_1$ und A_2

$$A_1 = \frac{v_0 - k_2 z_0}{k_1 - k_2} \quad (277)$$

$$A_2 = -\frac{v_0 - k_1 z_0}{k_1 - k_2} \quad (278)$$

Setze $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \gamma = i\omega$

$$k_1 = -\beta + \gamma, \quad k_2 = -\beta - \gamma, \quad k_1 - k_2 = 2\gamma \quad (279)$$

$$e^{k_1 t} = e^{-\beta t} e^{\gamma t}, \quad e^{k_2 t} = e^{-\beta t} e^{-\gamma t} \quad (280)$$

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{v_0 + (\beta + \gamma)z_0}{2\gamma} e^{-\beta t} e^{\gamma t} - \frac{v_0 - (-\beta + \gamma)z_0}{2\gamma} e^{-\beta t} e^{-\gamma t} \\ &= z_0 e^{-\beta t} \left(\frac{e^{\gamma t} + e^{-\gamma t}}{2} + \left(\frac{v_0}{z_0} + \beta \right) \frac{e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}}{2\gamma} \right) \end{aligned} \quad (281)$$

Mit Hilfe der Euler'schen Formeln $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ folgt für imaginäres $\gamma = i\omega$:

$$\left. \begin{aligned} e^{i\omega t} &= \cos \omega t + i \sin \omega t \\ e^{-i\omega t} &= \cos \omega t - i \sin \omega t \end{aligned} \right\} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \cos \omega t \quad (282)$$

$$z(t) = z_0 e^{-\beta t} \left(\cos \omega t + \left(\frac{v_0}{z_0 \omega} - \frac{\beta}{\omega} \right) \sin \omega t \right) \quad (283)$$

Fasse Summe von 2 Winkelfunktionen zu einer Winkelfunktion mit einer Phase zusammen.
Setze $\frac{v_0}{z_0 \omega} - \frac{\beta}{\omega} = -\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 e^{-\beta t} \left(\cos \omega t - \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \sin \omega t \right) \\ &= \frac{z_0}{\cos \phi} e^{-\beta t} (\cos \phi \cos \omega t - \sin \phi \sin \omega t) \\ &= \underbrace{\frac{z_0}{\cos \phi}}_A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi) = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (284)$$

Energie eines schwachgedämpften Oszillators ($\omega \approx \omega_0$)

Ohne Dämpfung bleibt Summe aus kinetischer und potentieller Energie erhalten.

$$E = T + V = \frac{1}{2} C (\text{Amplitude})^2 \quad (285)$$

Bei gedämpfter Schwingung nimmt Amplitude und damit auch die Gesamtenergie der Schwingung ab.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} C \underbrace{(\text{Amplitude})^2}_{A e^{-2\beta t}} = \frac{1}{2} C A^2 e^{-2\beta t} = E(t=0) e^{-2\beta t} \\ &= E(t=0) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{1}{2\beta} \end{aligned} \quad (286)$$

Die Gesamtenergie fällt nach der Zeit τ auf den e-ten Teil ab.

Der Gütefaktor oder die Güte eines Oszillators: Wichtig auch bei elektronischen Anwendungen

$$\text{Güte } Q = \frac{\text{gespeicherte Energie}}{\text{im Zeitintervall } \frac{1}{\omega} \text{ abgegebene Energie}} \rightsquigarrow \text{ schwach gedämpfter Oszillator} \quad (287)$$

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\tau} \underbrace{E_0}_{E(t=0)} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (288)$$

$$\rightsquigarrow -\Delta E = \frac{1}{\tau} E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{1}{\omega_0} \quad (289)$$

$$\rightsquigarrow Q = \frac{E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{1}{\tau} E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{1}{\omega_0}} = \omega_0 \tau \quad (290)$$

6.3 Erzwungene Schwingungen

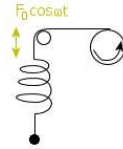
Federpendel wird durch eine periodisch wirkende Kraft auf und ab bewegt

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -Cz - \gamma \frac{dz}{dt} + F_0 \cos \omega t \quad (291)$$

$$\omega_0^2 = \frac{C}{m}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2m}, \quad K = \frac{F_0}{m}$$

$$\rightsquigarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\beta \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = K \cos \omega t \quad (292)$$

Inhomogene Differentialgleichung.



Mathematik: Lösung der inhomogenen Differentialgleichung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung plus einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Ansatz:

$$z(t) = A_1 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \phi') + A_2 \cos(\omega t + \phi) \quad (293)$$

ω' : Frequenz der freien gedämpften Schwingung, ω : erzwungene Frequenz = Frequenz der Anregung.

Für genügend lange Zeiten $t \gg \frac{1}{\beta}$ wird die Amplitude $A_1 e^{-\beta t}$ vernachlässigbar klein \leadsto Stationärer Zustand der Schwingung.

Ansatz:

$$z(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi) \quad (294)$$

Ableitung nach der Zeit:

$$\frac{dz}{dt} = -A_2 \omega \sin(\omega t + \phi) \quad (295)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -A_2 \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad (296)$$

eingesetzt in Differentialgleichung:

$$-\omega^2 A_2 \cos(\omega t + \phi) - 2\beta \omega A_2 \sin(\omega t + \phi) - 2\beta \omega A_2 \sin(\omega t + \phi) + \omega_0^2 A_2 \cos(\omega t + \phi) = K \cos(\omega t) \quad (297)$$

Anwendung der Additionstheoreme für Winkelfunktionen:

$$\sin(\omega t + \phi) = \sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi \quad (298)$$

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi \quad (299)$$

und ordnen die einzelnen Terme

$$\cos \omega t (A_2(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi - 2\beta \omega A_2 \sin \phi - K) - \sin \omega t (A_2(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi + 2\beta \omega A_2 \cos \phi) = 0 \quad (300)$$

da Lösung für alle t gelten muss $\leadsto (\dots) = 0$. Also:

$$A_2(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi = -2\beta \omega A_2 \cos \phi \quad (301)$$

$$\leadsto \tan \phi = -\frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (302)$$

$$A_2(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi - 2\beta \omega A_2 \sin \phi = K \quad (303)$$

$$\rightarrow A_2 = \frac{K}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi - 2\beta \omega \sin \phi} \quad (304)$$

$$\leadsto A_2 \cos \phi = \frac{K(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\beta \omega)^2} \quad (305)$$

$$\leadsto A_2 \sin \phi = \frac{-2\beta \omega K}{(\omega_0^2 - \omega^2) + (2\beta \omega)^2} \quad (306)$$

$$A_2^2 \sin^2 \phi + A_2^2 \cos^2 \phi = A_2^2 = \frac{(2\beta \omega)^2 K^2 + K^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta \omega)^2)} \quad (307)$$

$$\leadsto A_2 = \frac{K}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta \omega)^2}} \quad (308)$$

Wenn ϕ und A_2 die berechneten Werte annehmen, dann erfüllt unser Lösungsansatz die Differentialgleichung

Frequenzabhängigkeit der Phase:

$$\tan \phi = -\frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (309)$$

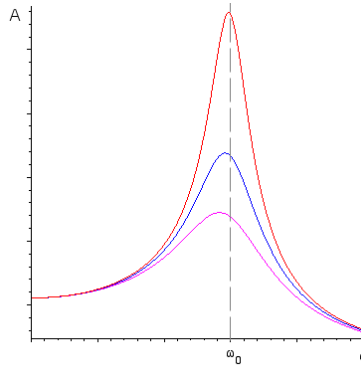
$$\omega \ll \omega_0 : \tan \phi \approx -\frac{2\beta}{\omega_0^2} \omega \quad (310)$$

$$\omega \gg \omega_0 : \tan \phi \approx \frac{2\beta}{\omega} \quad (311)$$

Frequenzabhängigkeit der Amplitude: Amplitude wird maximal, wenn er Nenner Minimalwert annimmt.

$$\frac{d}{d\omega} ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2) \rightsquigarrow \omega_{Res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta\omega} \quad (312)$$

Amplitude für $\omega \rightarrow 0 \rightsquigarrow A_2 = \frac{F}{m} \omega_0^2 = \frac{F_0}{C}$. Amplitude für $\omega \rightarrow \infty \rightsquigarrow A_2 \rightarrow 0$



Für geringe Dämpfung ist $\omega_{Res} \approx \omega_0$

RESONANZKATASTROPHE: Für $\beta \rightarrow 0$ geht A_2 bei Resonanz ($\omega \rightarrow \omega_0$) gegen ∞ .

Fazit: Die Amplitude der erzwungenen Schwingung hängt ab von der

- Beschleunigungsamplitude der äußeren Kraft $K = \frac{F_0}{m}$
- Dämpfung $\beta = \frac{\gamma}{2m}$
- Frequenz der Erregerschwingung ω und der Eigenfrequenz ω_0 des erregten Systems

Resonanzüberhöhung für schwache Dämpfung ($\omega_{Res} \approx \omega_0$)

$$\frac{A_2(\omega_{Res})}{A_2(\omega=0)} \approx \frac{A_2(\omega_0)}{A_2(0)} = \frac{K\omega_0^2}{2\beta\omega_0 K} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \omega_0 \tau = Q \quad (313)$$

Anmerkung: Einfachere Ableitung von $\phi(\omega)$ und $A(\omega)$ mit komplexem Ansatz

$$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = K e^{i\omega t}; \quad z = x + iy \quad (314)$$

Lösungsansatz:

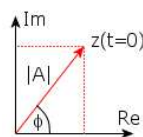
$$z(t) = A e^{i\omega t} \quad (315)$$

mit komplexer Amplitude

$$A = |A| e^{i\phi} = |A| (\cos \phi + i \sin \phi) = a + bi \quad (316)$$

$$\dot{z}(t) = i\omega A e^{i\omega t} \quad (317)$$

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 A e^{i\omega t} \quad (318)$$



Physikalische Lösung ist z.B. Realteil von $z(t)$

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} + 2\beta i\omega A e^{i\omega t} = K e^{i\omega t} \quad (319)$$

$$A = \frac{K(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta\omega i)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta\omega i)(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta\omega i)} = \frac{K(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta\omega i)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} \quad (320)$$

$$a = \frac{K(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} \quad (321)$$

$$b = \frac{-2K\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2} \quad (322)$$

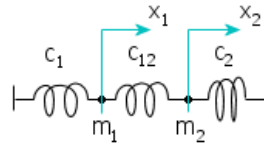
$$\leadsto \text{Amplitude } |A| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{K}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \quad (323)$$

$$\text{Phase } \tan \phi = \frac{b}{a} = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (324)$$

6.4 Gekoppelte Oszillatoren

Spielen in vielen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle, z.B. bei Gitterschwingungen im Festkörper.

Beispiel: Gekoppeltes Federpendel



Im Folgenden: $c = c_1 = c_2$, $m = m_1 = m_2 \leadsto$ Differentialgleichung:

$$m\ddot{x}_1 = -cx_1 - c_{12}(x_1 - x_2) \quad (325)$$

$$m\ddot{x}_2 = -cx_2 - c_{12}(x_2 - x_1) \quad (326)$$

Gekoppelte Differentialgleichung: x_1 und x_2 tauchen in beiden Gleichungen auf.

Trick: Einführung neuer Koordinaten

- Addiere die beiden Gleichungen

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -c(x_1 + x_2) \quad (327)$$

- Subtrahiere die beiden Gleichungen

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -c(x_1 - x_2) - 2c_{12}(x_1 - x_2) \quad (328)$$

Führe neue Koordinaten ein:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ q_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2m\ddot{q}_1 = -2cq_1 \\ 2m\ddot{q}_2 = -2cq_2 - 4c_{12}q_2 \end{array} \right\} \leadsto \left. \begin{array}{l} m\ddot{q}_1 + cq_1 = 0 \\ m\ddot{q}_2 + (c + 2c_{12})q_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (329)$$

Allgemeine Lösung:

$$q_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \text{ mit } \omega_1 = \frac{c}{m} \quad (330)$$

$$q_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \text{ mit } \omega_2 = \frac{c + c_{12}}{m} \quad (331)$$

Definition: Koordinaten, welche Differentialgleichungen unabhängiger harmonischer Oszillatoren genügen, heißen NORMALKOORDINATEN. \rightarrow Mehr in theoretischer Mechanik. Eine NORMALSCHWINGUNG ist ein Bewegungszustand des Systems, für welchen nur eine Normalordinate von Null verschieden ist.

Rücktransformation (Vereinfachung $A_1 = A_2 = A$)

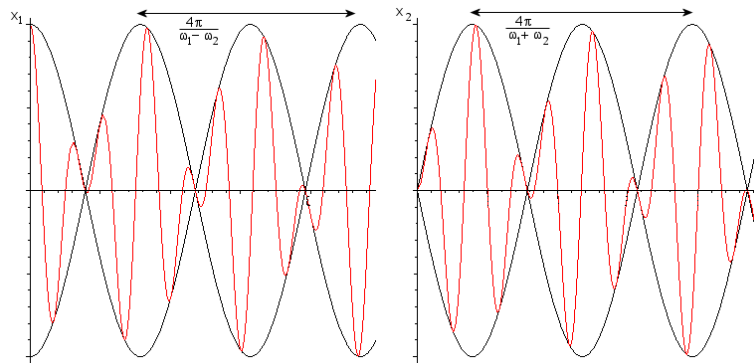
$$x_1 = q_1 + q_2 \quad (332)$$

$$x_2 = q_1 - q_2 \quad (333)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (334)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= A (\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \cos(\omega_2 t + \phi_2)) \\ &= 2A \cos \frac{\omega_1 t + \phi_1 + \omega_2 t + \phi_2}{2} \cos \frac{\omega_1 t + \phi_1 - \omega_2 t - \phi_2}{2} \\ &= 2A \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \end{aligned} \quad (335)$$

$$x_2 = -2A \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \quad (336)$$



Normalschwingungen:

- Fall $q_2 = 0$:

$$q_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) = 0 \rightsquigarrow x_1 = x_2 \quad (337)$$

$$q_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = x_1 = x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (338)$$

Die beiden Massen schwingen mit Frequenz $\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ in Phase

- Fall $q_1 = 0$:

$$q_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 0 \rightsquigarrow x_1 = -x_2 \quad (339)$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) = x_1 = -x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad (340)$$

Die beiden Massen schwingen mit der Frequenz $\omega_2 = \sqrt{\frac{c+c_{12}}{m}}$

6.5 Parametrisch verstärkte Schwingungen

Durch Energiezufuhr im Rhythmus der freien Schwingung kann Schwingung verstärkt werden. **Beim Schaukeln:** Durch Verlagerung des Schwerpunktes wird die effektive Fadenlänge geändert

Beispiel Schiffschaukel: Durch Schwerpunktsverlagerung wird Arbeit geleistet. Beim Aufstehen bei $\phi = 0$ wird mehr Arbeit geleistet ($W = -mg\Delta l$) als beim "in die Knie gehen" frei wird ($W = mg\Delta l \cos \phi$) \rightsquigarrow geleistete Arbeit führt zu größeren Schwingungsamplituden. Bisher:

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \omega_0^2 \phi = 0 \quad (341)$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad (342)$$

$$l(t) = l(1 - \epsilon \sin \omega_0 t) \quad (343)$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \frac{1}{1 - \epsilon \sin 2\omega_0 t} \quad (344)$$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x \quad (+x^2 + \dots) \quad (345)$$

$$\omega_0^2 = \omega_0^2(1 + \epsilon \sin 2\omega_0 t) \quad (346)$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0^2(1 + \epsilon \underbrace{\sin 2\omega_0 t}_{(*)})\phi = 0 \quad (347)$$

(*): Anregung mit doppelter Frequenz.

Periodische Änderungen der Fadenlänge l führt zu periodischen Änderungen der Frequenz ω_0 . Parameter $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ wurde MODULIERT \rightarrow parametrische Schwingungsverstärkung

7 Nichtlineare Dynamik und Chaos

7.1 Nichtlineare Oszillatoren

Das mathematische Pendel ist nur für kleine Winkel ϕ ein harmonischer Oszillator. Die genaue Differentialgleichung war:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\phi = 0 \quad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad (348)$$

Wir haben die Taylorreihe von

$$\sin\phi = \phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5 + \dots \quad (349)$$

nach dem ersten Glied abgebrochen und $\sin\phi = \phi$ gesetzt. Mitnahme des ϕ^3 - Terms führt bereits zu einer nichtlinearen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega_0^2\phi - \frac{1}{3!}\underbrace{\phi^3}_{(*)} = 0 \quad (350)$$

Bewegungsgleichung eines anharmonischen Oszillators mit nichtlinearem Term (*). Exakte Lösung für Schwingungsdauer T :

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{1}{2}\phi_{max}\right) \sin^2\chi}} \quad (351)$$

$$\chi = \frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi_{max}}{2}\right)} \quad (352)$$

Elliptisches Integral 1. Art

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (353)$$

Schwingungsdauer des harmonischen Oszillators, unabhängig von der Amplitude.

Für nichtlineare Oszillatoren wird die Schwingungsdauer von der Amplitude abhängig!

Weiteres Beispiel: Auch Hook'sches Gesetz ist nur für genügend kleine Auslenkungen gültig \leadsto Wenn Rückstellkraft nicht mehr linear ist (bisher: $F = -C\Delta z$), wird auch hier die Frequenz von der Amplitude abhängig.

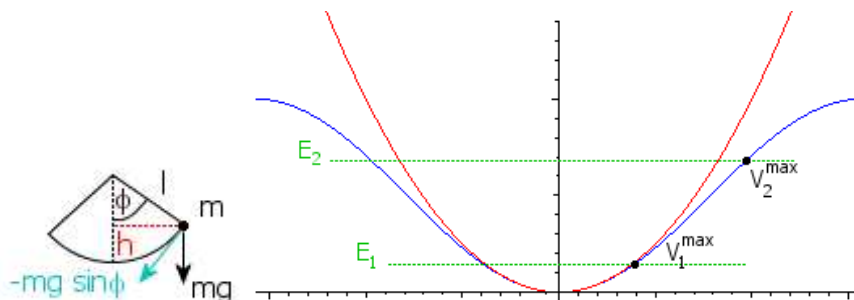
7.2 Potentielle Energie: Harmonische und anharmonische Oszillatoren

7.2.1 Potentielle Energie des Fadenpendels

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \sin\phi = 0 \quad \text{Exakte Differentialgleichung} \quad (354)$$

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0 \quad \text{Differentialgleichung für kleine } \phi \quad (355)$$

$$V = mgh = mgl(1 - \cos\phi) \approx mgl\frac{1}{2}\phi^2 \quad \text{Potentielle Energie} \quad (356)$$



Maximale Auslenkung bestimmt durch Gesamtenergie $E = T + V$. Für $E = E_1$ ist Oszillator harmonisch, für $E = E_2$ ist Oszillator anharmonisch / nichtlinear.

Rücktreibende Kraft: $\vec{F} = \text{grad}V$

- Für harmonische Näherung:

$$F = -\frac{dV}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(mgl \frac{1}{2} \phi^2 \right) = -mg\phi \quad (357)$$

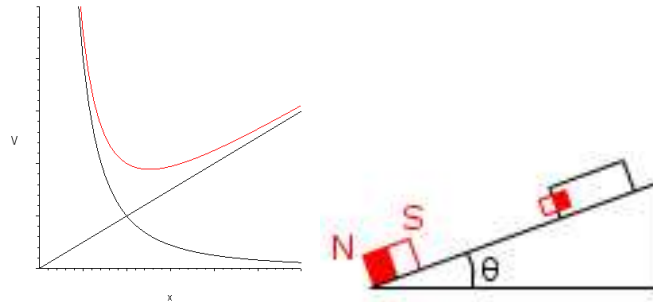
- Für exakte potentielle Energie:

$$F = -\frac{dV}{ds} = -\frac{d}{ds} (mgl(1 - \cos \phi)) = -mg \sin \phi \quad (358)$$

Eine quadratisch ansteigende potentielle Energie ist mit einer Kraft verknüpft, die linear mit der Auslenkung der Masse anwächst. Eine symmetrische, parabolisch anwachsende potentielle Energie ist für viele physikalische Systeme eine gute Näherung.

7.2.2 Magnetoszillator: Beispiel für anharmonische potentielle Energie

Anharmonisches Potential $\leadsto \omega$ bzw. T des Systems hängt von der Amplitude der Auslenkung ab



7.2.3 Potentielle Energie eines Duffing- Oszillators

Modellsystem, das, angetrieben, ausgeprägte chaotische Dynamik zeigt. Berücksichtigung eines Kraftarmes, der proportional zur dritten Potenz der Auslenkung ist, also rückstellende Kraft der Form

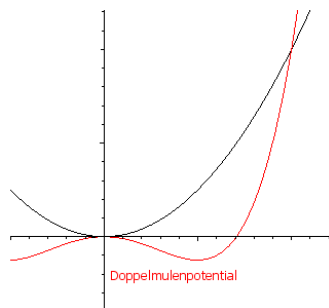
$$F = -Cx - \epsilon x^3 \quad (359)$$

\leadsto zugehörige potentielle Energie

$$V(x) = \frac{1}{2}Cx^2 + \frac{1}{4}\epsilon x^4 \quad (360)$$

Bemerkung: Wird auch im Praktikum untersucht! Ein interessanter Fall ergibt sich für $C/\epsilon < 0$ und $\epsilon/\epsilon > 0$:

$$V(x) = \frac{1}{4}\epsilon/x^4 - \frac{1}{2}|C/\epsilon|x^2 \quad (361)$$



7.3 Resonanzkurve nichtlinearer Oszillatoren

Mit $c = \omega_0$ und $\epsilon = -\frac{1}{6}\omega_0^3$ und $x = \phi$ entspricht die Differentialgleichung des Duffing-Oszillators der eines mathematischen Pendels in der Näherung $\sin \phi \approx \phi - \frac{1}{3!}\phi^3$. Wie sieht Resonanzkurve aus, wenn das System von außen angetrieben wird

$$\ddot{x} = -2\beta\dot{x} - \omega_0^2(x - \epsilon t x^3) + k \cos(\omega t + \phi) \quad (362)$$

Bemerkung Hier steckt die Phase ϕ im Antrieb und nicht im Lösungsansatz!

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos \omega t \cos \phi - \sin \omega t \sin \phi \quad (363)$$

Mit $k \cos \phi = H$ und $k \sin \phi = G$

$$\rightsquigarrow \ddot{x} = -2\beta\dot{x} - \omega_0^2 x - \epsilon t \omega_0^2 x^3 + H \cos \omega t - G \sin \omega t \quad (364)$$

Bemerkung: $k = \sqrt{H^2 + G^2}$

Duffings Idee: Iterative Lösung. Starte mit geratener Lösung $x_0(t)$ und setze diese auf der rechten Seite von Gleichung (364) ein, usw. Nach n Iterationen $x(t) \approx x_n(t)$

Die harmonische Lösung: Geratene Lösung

$$x_0(t) = A \cos \omega t \quad (365)$$

→ eingesetzt in rechte Seite von (364)

$$\ddot{x}_1 = 2\beta\omega A \sin \omega t - \omega_0^2 A \cos \omega t - \epsilon t \omega_0^2 A^3 \cos^3 \omega t + H \cos \omega t - G \sin \omega t \quad (366)$$

Benutze, dass

$$\cos^3 \omega t = \frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t \quad (367)$$

ist, und integriere zweimal, wobei Integrationskonstanten = 0 gesetzt werden

$$\rightsquigarrow x_1(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + \frac{1}{36} \frac{\epsilon t \omega_0^2 A^3}{\omega^2} \cos 3\omega t \text{ mit} \quad (368)$$

$$A_1 = \frac{1}{\omega^2} \left(\omega_0^2 A + \frac{3}{4} \epsilon t \omega_0^2 A^2 - H \right) \quad (369)$$

$$B_1 = -\frac{1}{\omega^2} (2\beta\omega A - G) \quad (370)$$

Bemerkung: Schon der erste Integrationsschritt führt zu Termen, welche die dreifache Frequenz enthalten \rightsquigarrow höheren Harmonischen.

Allgemein: In den stationären Lösungen können neben höheren harmonischen auch subharmonische Lösungen

$$\omega_n = \frac{\omega}{n} \quad (371)$$

mit $n = 1, 2, \dots$ auftreten.

Näherung 0. Ordnung: Annahme, dass die geratene Lösung $x_0(t)$ bereits eine gute Näherung ist → (Koeffizientenvergleich): $A_1 \approx A$, $B_1 \approx 0$. $A = A_1$ und $B_1 = 0$ und nach H und G auflösen.

$$H = (\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} \epsilon t \omega_0^2 A^3 \quad (372)$$

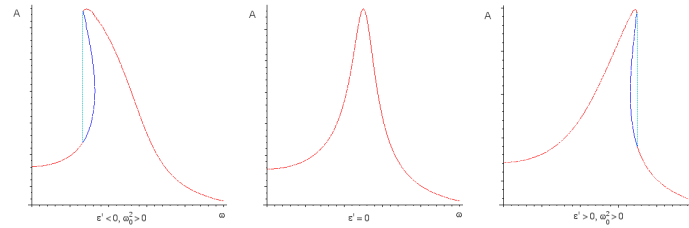
$$G = 2\beta\omega A \quad (373)$$

$$\rightsquigarrow \tan \phi = \frac{G}{H} = \frac{2\beta\omega A}{(\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} \epsilon t \omega_0^2 A^3} \quad (374)$$

Aus $k = \sqrt{H^2 + G^2}$ folgt die Amplituden- Frequenz- Beziehung:

$$\rightsquigarrow \sqrt{\left((\omega_0^2 - \omega^2) A + \frac{3}{4} \epsilon t \omega_0^2 A^3 \right)^2 + (2\beta\omega A)^2} = k \quad (375)$$

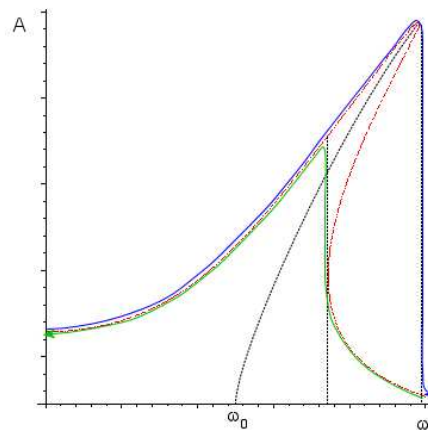
A - ω kann z.B. mit Hilfe von Maple gezeichnet werden.



$\epsilon \leq 0$: Zwischen ω_- und ω_+ existieren drei Lösungen von A. Im farbigen Bereich ist die Kurve instabil und wird nicht durchlaufen!

Man beobachtet BISTABILITÄT und HYSTERESE

- Bei Frequenzerniedrigung: A springt bei ω_- vom unteren Ast auf den oberen
- Bei Frequenzerhöhung: A springt bei ω_+ vom oberen auf den unteren Ast



7.4 Der Phasenraum

- DYNAMISCHES SYSTEM (Federpendel, gekoppelte Pendel, usw.) wird durch zeitabhängige Größen, wie z.B. Ort, Geschwindigkeit beschrieben. $\{\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)\}$. Für ein Teilchen in drei Dimensionen: $N = 6$, für zwei Teilchen ist $N = 12$.

Beispiel: Fadenpendel $\{z(t), \dot{z}(t)\}$ 1D-Problem

- DETERMINISTISCHES SYSTEM: System, dessen Zustand zum Zeitpunkt t_2 durch den Zustand zu einem früheren Zeitpunkt t_1 eindeutig bestimmt ist.

Hinweis: DETERMINISTISCHES CHAOS, Gegensatz: STOCHASTISCHES SYSTEM, z.B. radioaktiver Zerfall

- ZUSTAND, ZUSTANDSVEKTOR ist zu einem bestimmten Zeitpunkt t durch

$$\vec{Z}(t) = \{\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)\} \quad (376)$$

festgelegt. Zeitliche Änderung dieses Vektors

$$\dot{\vec{Z}} = \{\dot{\xi}_1(t), \dots, \dot{\xi}_N(t)\}. \quad (377)$$

Strebt das System gegen einen zeitlich konstanten Zustand, so muss gelten

$$\dot{\vec{Z}} = 0 \rightsquigarrow \text{ATTRAKTOR} \quad (378)$$

- TRAJEKTORIE: Kurve $\vec{Z}(t)$, welche der zeitlichen Entwicklung des Systems entspricht
- PHASENRAUM: N -dimensionaler Raum, der alle Zustände des Systems beinhaltet.

Beispiel 1: Ungedämpftes Federpendel

$$\text{Zustand } \vec{Z}(t) = \{z(t), \dot{z}(t)\} = \{z(t), v(t)\} \quad (379)$$

Anfangsbedingungen z.B. $z(0) = A, \dot{z}(0) = 0 = v(0)$

$$z(t) = A \cos \omega_0 t \quad (380)$$

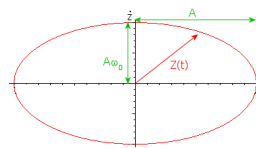
$$\leadsto \cos^2 \omega_0 t = \left(\frac{z(t)}{A}\right)^2 \quad (381)$$

$$\dot{z}(t) = v(t) = -A\omega_0 \sin \omega_0 t \quad (382)$$

$$\leadsto \sin^2 \omega_0 t = \left(\frac{\dot{z}(t)}{A\omega_0}\right)^2 \quad (383)$$

$$\leadsto \left(\frac{\dot{z}(t)}{A\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{z(t)}{A}\right)^2 = 1 \quad (384)$$

Gleichung einer Ellipse

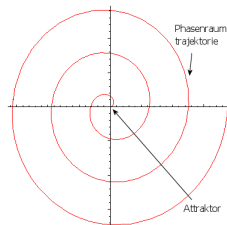
**Beispiel 2:** Gedämpfte Schwingung

$$z(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi); \text{ mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (385)$$

$$\dot{z}(t) = -A\beta e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi) - A\omega e^{-\beta t} \sin(\omega t + \phi) \quad (386)$$

$$z(t=0) = A \leadsto \phi = 0 \text{ (Anfangsbedingung)} \quad (387)$$

$$\vec{Z}(\infty) = \{\dot{z}(\infty), z(\infty)\} = 0 \quad (388)$$

**Beispiel 3:** Freie gedämpfte Oszillationen im Duffing- Oszillator

$$\ddot{x} = -\underbrace{2\beta}_{\frac{1}{10}} \dot{x} - \underbrace{\omega_0^2}_{-1} x - \underbrace{\epsilon/\omega_0^2}_{\frac{1}{4}} x^2 + \underbrace{K}_1 \sin \underbrace{\omega}_1 t \quad (389)$$

$$\ddot{x} = -\frac{1}{10} \dot{x} + x - \frac{1}{4} x^3 + \sin t \quad (390)$$

Anfangsbedingungen: $x(0) = 0, v(0) = 0 \leadsto$ numerische Lösung

Wozu Phasenraum betrachten? Bei komplizierten Vorgängen erkennt man die Periodizität im Phasenraum einfacher als in $x(t)$ - Darstellung. Bei chaotischen Verhalten ist auch das Bild im Phasenraum komplex. Man benutzt dann POINCAR- SCHNITTE. Poincar- Schnitte für Systeme mit zeitperiodischen Antrieb: Aufnahme eines Zustandes $\{x_i, v_i\}$ nur zu bestimmten Zeiten $t_j = jT, j = 1, 2, \dots, T = \frac{2\pi}{\omega}$. \leadsto stoposkopisches Bild des Phasenraumes.

7.5 Chaotische Dynamik

Bewegung eines chaotischen Systems ist nicht mehr periodisch, sondern ändert sich ständig, so dass sein Verhalten zufällig und ungeordnet erscheint. Ein wichtiges Merkmal von Chaos

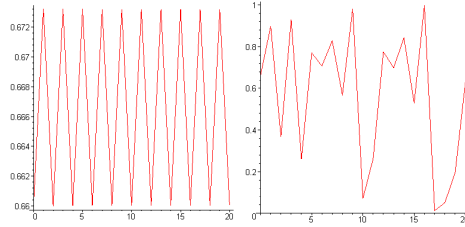
ist die extreme Empfindlichkeit gegenüber einer Änderung der Anfangsbedingungen.

Beispiel 5: Duffing- Oszillator

$$\ddot{x} = -\frac{1}{10}\dot{x} + x - \frac{1}{4} + 2.5 \sin 2t \quad (391)$$

$x(0) = 0, v(0) = 0 \rightsquigarrow$ numerische Lösung

Bender- Oszillator (\rightarrow Tipler)



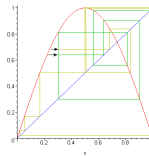
2 Amplitudenhöhen bzw. alle verschieden

7.6 Logistische Abbildung und Feigenbaum- Diagramm

”Simulation” des beobachteten komplexen Verhaltens mit einfacher mathematischer Abbildung.

LOGISTISCHE ABBILDUNG (logistic map):

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \quad x = [0, 1] \quad (392)$$



Nach einigen Iterationsschritten findet man in Abhängigkeit von a stabile oder oszillierende Grenzwerte x_n . x_n - Werte entsprechen z.B. den maximalen Amplituden eines nichtlinearen Oszillators (z.B. Magnetoszillator), a der Frequenz ω . Für $3 < a < a_\infty$ oszillieren die Werte x_n zwischen 2^k Werten hin und her.

$$\begin{array}{l} 3 < a < 3.449 \dots & | & k = 1 \\ 3.449 < a < 3.544 \dots & | & k = 2 \end{array}$$

Die Punkte im Feigenbaumdiagramm, bei denen k um 1 erhöht wird, heißen BIFURKATIONSPUNKTE. Mit wachsenden Werten von a wird das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bifurkationen immer kleiner. Es gilt:

$$a_k = a_\infty - \frac{c}{\delta^k}, \quad k \gg 1 \quad (393)$$

Für jeden Abstand $\Delta_k = a_k - a_{k-1}$ folgt dann

$$\Delta_k = c \frac{\delta - 1}{\delta^k} \quad (394)$$

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} - a_k} = 4.669201609 \dots \text{ Feigenbaumkonstante} \quad (395)$$

δ ist universelle Konstante für sogenannte UNIMODALE ABBILDUNG. Folge a_z konvergiert gegen einen Grenzwert

$$a_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 3.5699456 \dots \quad (396)$$

Ab a_∞ setzt Chaos ein. Obwohl die logistische Abbildung scheinbar nichts mit der Differentialgleichung nichtlinearer Oszillatoren zu tun hat, findet man den Weg ins Chaos über Periodenverdopplung und die Feigenbaumkonstante in vielen physikalischen System realisiert.

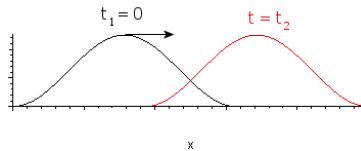
8 Mechanische Wellen

Beispiele sind Wasserwellen, Schallwellen, Gitterschwingungen in Kristallen, etc. Wenn ein schwingender Massepunkt mit anderen Massepunkten gekoppelt ist, kann sich diese Schwingung infolge der Kopplung im Raum ausbreiten. Die einzelnen Teilchen bewegen sich um ihre Gleichgewichtslage. Dabei wird Schwingungsenergie räumlich transportiert.

8.1 Beispiel Schallwellen

8.1.1 Ausbreitung einer Störung

Betrachte einen nach rechts laufenden Puls auf Seil



$$y_1 = F(x_1, t_1), \quad y_2 = F(x_2, t_2) \quad (397)$$

Wenn die räumliche Form des Pulses erhalten bleibt, gilt:

$$y = F(x - ct) \text{ Puls nach rechts} \quad (398)$$

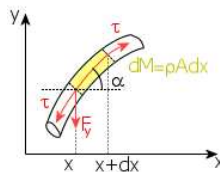
$$y = f(x + ct) \text{ Puls nach links} \quad (399)$$

$$y(x_2 - ct_2) = y(x_1 - 0) \quad (400)$$

8.1.2 Die Wellengleichung

Für TRANSVERSALSCHWINGUNG des Seiles (einer Saite)
Näherungen

- Gravitationskräfte werden vernachlässigt
- Kleine Auslenkungen $\frac{dy(x,t)}{dx} \ll 1$
- Zugkraft immer tangential mit konstantem Betrag



τ : Zugspannung, τA : Zugkraft, A : Querschnittsfläche

$$F_y = A\tau \sin \alpha \quad (401)$$

Für kleine Auslenkungen α gilt:

$$\sin \alpha = \tan \alpha = \alpha \text{ wegen Taylorreihe} \quad (402)$$

$$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + \dots \quad (403)$$

$$\tan \alpha \approx \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \dots = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (404)$$

$$F_y = A\tau \frac{\partial y}{\partial x} \quad (405)$$

$$\leadsto \frac{\partial F_y}{\partial x} = A\tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (406)$$

Auf Massenelement $dM = \rho A dx$ wirkt die Kraft

$$F_y(x + dx) - F_y(x) = \frac{\partial F_y}{\partial x} dx = A\tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad (407)$$

Mit 2. Newton'schem Gesetz:

$$dM \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho A dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad (408)$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (409)$$

Bemerkung: $\frac{\partial y}{\partial t}$ und $\frac{\partial y}{\partial x}$ bedeutet nur, dass die Ableitung nur nach t ($x = const$) bzw. x ($t = const$) durchgeführt wird. Unser Ansatz für den "wandernden Puls" ist eine Lösung der Wellengleichung:

$$y = F(x \pm ct) \text{ Abkürzung: } x \pm ct =: a \quad (410)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial t} \quad (411)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} c^2 \quad (412)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial a} \underbrace{\frac{\partial a}{\partial x}}_1 \quad (413)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} \quad (414)$$

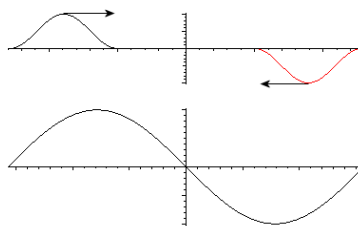
$$\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} c^2 = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} \quad (415)$$

$$\rightsquigarrow c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad (416)$$

Alle Wellen, die mit der Geschwindigkeit c nach rechts oder links laufen, sind Lösungen der Wellengleichung. c hängt von Spannung des Seils (oder Saite) und der spezifischen Masse ρ ab.

8.1.3 Reflexion von Seilwellen

Was passiert, wenn pulsartige Störung $F(x \pm ct)$ auf das fest eingespannte Ende des Seils trifft? Erfüllung der Randbedingung $y(x=0) = 0$ durch Überlagerung zweier Wellen. Überlagerung von $F(x - ct)$ mit $G(x + ct)$ mit $|F| = |G|$ liefert die gewünschte Randbedingung! Die Reflexion am festen Ende führt dazu, dass eine dort eintreffende Störung mit negativem Vorzeichen reflektiert wird.



Bemerkung 1: Puls an einem losen Seilende wird nicht invertiert. Die Randbedingung in diesem Fall

$$\left. \frac{dy(x, t)}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (417)$$

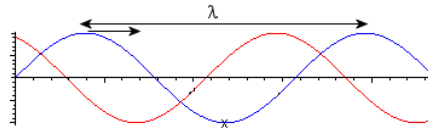
Bemerkung 2: Bei obiger Betrachtung haben wir das SUPERPOSITIONSPRINZIP benutzt: Beim Zusammentreffen der Wellen addieren sich die Auslenkungen (gilt nur, wenn Wellengleichung linear in der Auslenkung, d.h. $F_y = A \tau \sin \alpha \approx \alpha$).

8.1.4 Sinusförmige harmonische Wellen

$$y(x, t) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x \pm ct) \right) \quad (418)$$

beschreibt eine harmonische Welle, die nach links ("+") bzw. rechts ("-") läuft. λ ist die Wellenlänge = Strecke, welche die Welle während der Schwingungsperiode $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$ durchläuft. Es gilt:

$$cT = \lambda \text{ oder } c = \lambda\nu \quad (419)$$



WELLENVEKTOR $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, WELLENZAHL = $\frac{k}{2\pi} = \frac{1}{\lambda}$: Zahl der Wellentäler oder -berge pro Längeneinheit.

Für einen Beobachter, der mitbewegt auf einem Wellenmaximum sitzt, ist die Phase

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) = kx - \omega t = \text{const} \quad (420)$$

$$\leadsto \frac{d}{dt}(kx - \omega t) = 0 \quad (421)$$

$$\leadsto k \underbrace{\frac{dx}{dt}}_c - \omega = 0 \quad (422)$$

$$\leadsto \frac{dx}{dt} = c = \frac{\omega}{k} \text{ Phasengeschwindigkeit} \quad (423)$$

Äquivalente Darstellung:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm ct)\right) = A \sin(kx \pm \omega t) \\ &= A \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \nu t\right)\right) \end{aligned} \quad (424)$$

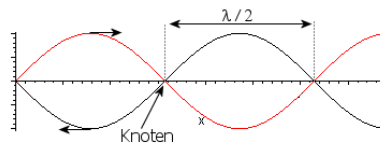
Bemerkung: $c = \sqrt{g \cdot h}$ hängt nicht von der Frequenz ab. In diesem Fall zeigt die Ausbreitungsgeschwindigkeit keine DISPERSION.

8.1.5 Reflexion harmonischer Wellen

STEHENDE WELLEN und Schwingungen. Was passiert, wenn die sinusförmige harmonische Seilwelle an einem festen Ende reflektiert wird? Von links einlaufende Welle

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (425)$$

wird mit gegenläufiger Welle überlagert



$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) \\ &= A (\sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t) + (\sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t) \\ &= 2A \underbrace{\sin(kx)}_* \underbrace{\cos(\omega t)}_{**} \text{ stehende Welle} \end{aligned} \quad (426)$$

*: Nullstellen bei bestimmten x- Werten: Knoten

*: Nullstellen, die zu bestimmten Zeiten auftreten

Randbedingung bei $x = 0$ ist erfüllt! Da die Schwingungsknoten und -bäuche eine feste Lage im Raum haben, spricht man von einer stehenden Welle.

8.1.6 Eigenfrequenz einer schwingenden Saite

Hält man die Saite bei $x = 0$ und bei $x = L$ fest ($y(x = 0) = 0, y(x = L) = 0$), so gilt:

$$2A \sin kl \cos \omega t = 0 \quad (427)$$

$$\leadsto \sin kl = 0 \quad (428)$$

$$\leadsto kL = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (429)$$

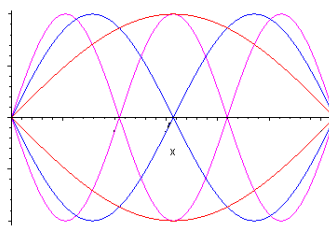
$$k = \frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (430)$$

$$\leadsto \lambda = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{oder mit } c = \lambda\nu \quad (431)$$

$$\nu = n \frac{c}{2L} \quad (432)$$

Die Grundfrequenz, z.B. einer Gitarrensaite, kann durch die Spannung τ abgestimmt werden, und durch Abgreifen am Griffbrett erhöht werden.

Mögliche Schwingungsmoden:



rot: Grundschwingung, Fundamentale, GRUNDTON
 blau: 1. Oberwelle, 1. Harmonische, OBERTON
 magenta: 2. Oberwelle

Bemerkung: Mit Ton der Tonleiter ist immer die Grundschwingung gemeint.

Im allgemeinen ergibt sich die Bewegung eines schwingenden Systems (Saite) aus der Überlagerung von Grundschwingung und Oberwellen.

$$y(x, t) = \sum_n A_n \cos \omega_n t \sin k_n x, \quad \omega_n = n\omega_0, \quad k_n = nk_0 \quad (433)$$

Die Beimischung von Obertönen macht die Klangfarbe eines Tones aus.

Bemerkung: Bisher haben wir nur transversale Schwingungen besprochen, d.h. Auslenkung erfolgt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Man spricht auch von TRANSVERSALER POLARISATION. Daneben gibt es auch longitudinale Wellen. Massepunkte schwingen parallel zur Ausbreitungsrichtung \leadsto LONGITUDINALE POLARISATION

8.2 Schallwellen

In Gasen und Flüssigkeiten existieren nur longitudinale Wellen (keine rückstellenden Kräfte zwischen den Molekülen). Kopplungsmechanismen für longitudinale Wellen: Lokale Druckminima und -maxima und damit verknüpfte Molekülbewegungen.

8.2.1 Longitudinale Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten

Betrachte eine Flüssigkeits- oder Gassäule z.B. in einer Flöte von Querschnitt A . \leadsto Resultierende Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (434)$$

κ : Kompressibilität, ρ : Dichte; bzw.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (435)$$

Wellengleichungen für Druck und Geschwindigkeit. $c^2 = \frac{1}{\Xi\rho} =$ Ausbreitungsgeschwindigkeit c longitudinaler Schallwellen. SCHALLGESCHWINDIGKEIT

Bemerkung: v und p hängen z.B. über

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (436)$$

zusammen. Lösungen dieser Wellengleichung sind auch hier ebene Wellen der Form

$$p(x, t) = p_0 \sin(kx \pm \omega t) \quad (437)$$

$$v(x, t) = v_0 \sin(kx \pm \omega t) \quad (438)$$

Schallgeschwindigkeit in Gasen ist von Temperatur und Molekülmasse abhängig.

Faustregel: Schallgeschwindigkeit in Gasen ist von der gleichen Größenordnung wie die mittlere thermische Geschwindigkeit der Gasmoleküle. Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten kann von Temperatur abhängig sein.

T=273K	H ₂ - Gas	He- Gas	Luft
	1284 $\frac{m}{s}$	965 $\frac{m}{s}$	331 $\frac{m}{s}$
T=298K	Aceton	Quecksilber	Wasser
	1378 $\frac{m}{s}$	1451 $\frac{m}{s}$	1497 $\frac{m}{s}$

8.2.2 Stehende Schallwellen

Festlegung einer Randbedingung führt auch hier zu stehenden Longitudinalwellen für v bzw. p .

$$v(x, t) = A \sin kx \cos \omega t \quad (439)$$

erfüllt Randbedingung bei $x = 0$; bedeutet, dass Gasmoleküle bei $x = 0$ nicht ausgelenkt werden. → Knoten der Geschwindigkeit: An den Knoten der Bewegung ist p maximal. Umgekehrt ist Geschwindigkeit v an Knoten von p maximal. Randbedingung bei $x = L$: $v(L)$ maximal

$$\leadsto \sin kL = \pm 1 \leadsto \frac{2\pi}{\lambda} L = n \frac{\pi}{2}; \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (440)$$

Man bekommt auch bei beidseitig offenen Enden stehende resonante Wellen. Randbedingung: $p(0) = p(L) = 0$

Anwendung: Flöte, Orgelpfeifen

8.2.3 Kugelwellen

Ausgehend von einer ruhenden punktförmigen Schallquelle breiten sich die WELLENFRONTEN (Flächen gleicher Phase) ISOTROP kugelförmig im Raum aus. Beschreibung z.B. der Auslenkung der Luftmoleküle

$$\xi(x, t) = \xi_0 8r \sin(kr - \omega t) \quad (441)$$

Annahme: Energie wird von Quelle in alle Richtungen gleichmäßig abgestrahlt.

Wenn P die abgestrahlte Leistung ist, dann ist die im Abstand r abgestrahlte Leistung pro Fläche

$$\tilde{P} = \frac{P}{4\pi r^2}. \quad (442)$$

$$\text{Intensität } I = \frac{\langle P \rangle}{\text{Fläche}} = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2} = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho c} \quad (443)$$

$\langle P \rangle$: mittlere Leistung, p_0^2 : lokale Druckamplitude

$$\text{Lautstärke } \beta = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (444)$$

I_0 : Intensität einer Bezugsschallquelle. Als I_0 wird die Intensität der

$$\text{HÖRSCHWELLE} = 10^{-12} \frac{W}{m^2} \quad (445)$$

bei $1kHz$ verwendet.

Bei Hörschwelle (446)

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I_0}{I_0} = 0 \text{ dB} \quad (447)$$

Bei Schmerzgrenze bei $1 \frac{W}{m^2}$ (448)

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{10^{-12}} = 120 \text{ dB} \quad (449)$$

Bezugsgrößen: Akustik: $I_0 = 1 \frac{W}{m^2}$ (bei $1kHz$), Hochfrequenztechnik: $I_0 = 1 \frac{mW}{m^2}$

30 dB : Verstärkung um Faktor 10^3

-30 dB : Abschwächung um Faktor 10^3

Festkörper, flüssiges Helium ($T \approx 4K$): Schallintensität quantisiert. Schallquanten heißen PHONONEN (analog Licht)

8.2.4 Akustischer Dopplereffekt

Wenn sich die Schallquelle bewegt, werden Wellenfronten gegeneinander verschoben. Von der Quelle in Zeit $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$ zurückgelegte Strecke:

$$\Delta x_Q = \frac{u}{\nu_0} \quad (450)$$

Von Wellenfront zurückgelegte Strecke:

$$\Delta x_W = \frac{c}{\nu_0} = \lambda_0 \quad (451)$$

\Rightarrow Verkürzung (Verlängerung) der Wellenlänge λ vor (nach) der Quelle:

$$\lambda = \lambda_0 \pm \frac{u}{\nu_0} \Rightarrow \text{gemessene Frequenz:} \quad (452)$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0 \pm \frac{u}{\nu_0}} = \frac{c}{\lambda_0} \frac{1}{1 \pm \frac{u}{\nu_0 \lambda_0}} \quad (453)$$

$$\text{mit } c = \nu_0 \lambda_0 \quad (454)$$

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{1 \pm \frac{u}{c}} \quad (455)$$

Schallgeschwindigkeit bleibt konstant, wenn Beobachter ruht. **Bewegter Beobachter:**

$$c' = c \pm u \quad (456)$$

”+“: Bewegung zu Quelle. Wellenlänge bleibt konstant

$$\Rightarrow \nu = \frac{c \pm u}{\lambda_0} = \nu_0 \left(1 \pm \frac{u}{c} \right) \quad (457)$$

Unterschied zu elektromagnetischen Wellen: c_{Licht} ist unabhängig von Bewegung des Beobachters \rightarrow Relativitätstheorie

Überschallgeschwindigkeit: Quelle eilt Wellenfronten voraus: MACH'SCHER KEGEL

Analog beim Licht: Geladene Teilchen bewegen sich im Medium mit

$$c_{\text{Vakuum}} > u > c_{\text{Medium}} = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{n} \quad (458)$$

mit Brechungsindex $n \Rightarrow$ Mach'scher Kegel aus Licht: TSCHERENKOV- STRAHLUNG

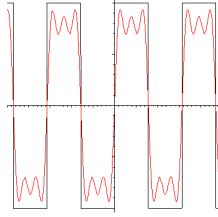
8.3 Fourieranalyse, Dispersion und Wellenpakete

8.3.1 Fourieranalyse

Linearität der Wellengleichung erlaubt Supersposition von Wellen mit mehreren Wellenlängen und Frequenzen! Umgekehrt lässt sich zeigen, dass sich (fast) jede räumlich oder zeitlich periodische Funktion als Summe von Sinus- bzw. Cosinusfunktionen darstellen lässt:

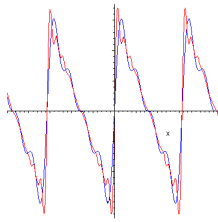
$$y(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nkx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nkx) \quad (459)$$

a_n und b_n heißen FOURIERKOEFFIZIENTEN von $y(x)$
Beispiele:



schwarz: Rechteckfunktion, rot: $y(x)$

$$y(x) = \sin kx + \frac{1}{3} \sin 3kx + \frac{1}{5} \sin 5kx + \dots; \quad k = \frac{2\pi}{a} \quad (460)$$



rot: 10 Koeffizienten, blau: 4

$$y(x) = \sin kx + \frac{1}{3} \sin 3kx + \frac{2}{5} \sin 5kx + \frac{1}{7} \sin 7kx + \dots \quad (461)$$

Auch unstetige und nicht differenzierbare Funktionen lassen sich darstellen.

8.3.2 Phasen und Gruppengeschwindigkeit

Was passiert, wenn man zwei Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen ω_1 und ω_2 (und verschiedenen Wellenvektoren k_1 und k_2) überlagert?

$$y_1(x, t) = y_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t) \quad (462)$$

$$y_2(x, t) = y_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t) \quad (463)$$

$$y(x, t) = y_1 + y_2 = y_0 (\sin(k_1 x - \omega_1 t) + \sin(k_2 x - \omega_2 t)) \quad (464)$$

Additionstheorem:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (465)$$

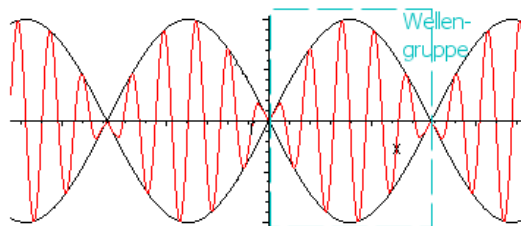
$$\Rightarrow y(x, t) = 2y_0 \sin(kx - \omega t) \cos(\Delta kx - \Delta \omega t) \quad (466)$$

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (467)$$

$$\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad (468)$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (469)$$

$$\Delta \omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad (470)$$



Momentaufnahme

Maxima der "Einzelwellen" können mit einer anderen Geschwindigkeit laufen als die WELLENGRUPPEN!

Annahme: $\omega(k) \neq ck \Rightarrow c = c(k) \rightsquigarrow$ Wellen mit DISPERSION

PHASENGESCHWINDIGKEIT: Term $\sin(kx - \omega t)$ beschreibt Trägerwelle mit Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ und Phasengeschwindigkeit $c_{Phase} = \frac{\omega}{k}$

GRUPPENGESCHWINDIGKEIT: Term $\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)$ beschreibt Ausbreitung der Wellengruppen. Gruppengeschwindigkeit $c_{Gruppe} = \frac{d\omega(k)}{dk}$. Falls $\frac{d\omega}{dk}$ nur schwach k -abhängig ist, gilt

$$\omega = c_{Phase}(k)k \quad (471)$$

$$\Rightarrow c_{Gruppe} = \frac{d\omega}{dk} = c_{Phase} + \frac{dc_{Phase}}{dk}k \quad (472)$$

Die Funktion $\omega(k)$ (DISPERSIONSFUNKTION) beschreibt das Medium, in dem sich die Wellen ausbreiten. Medien mit $\frac{d\omega}{dk} \neq const$ heißen DISPERSIV. Wählt man $\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$ größer (kleiner), so wird die Breite Δx der Einhüllenden kleiner (bzw. größer). Wählt man $\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ größer (bzw. kleiner), so wird die Breite Δt der Einhüllenden auf der Zeitachse schmaler (bzw. breiter).

8.3.3 Wellenpakete und Dispersion

Wasserwellen zeigen Dispersion. Im tiefen Wasser (Tiefe \gg Wellenlänge) gilt:

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3 \quad (473)$$

mit der Erdbeschleunigung g , Oberflächenspannung σ und Dichte ρ .

Ableitung: siehe z.B. Berkeley Physik Kurs

$$c_{Phase} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma}{\rho}k} \quad (474)$$

$$c_{Gruppe} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \frac{g + 3\frac{\sigma}{\rho}k^2}{\sqrt{gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3}} \quad (475)$$

Nur für $g = \frac{\sigma}{\rho}k^2$ ist $c_{Phase} = c_{Gruppe}$. Kann man auch nichtperiodische Vorgänge über Fouriersynthese beschreiben? Z.B. ein sogenanntes Wellenpaket?

Antwort: Ja, man muss aber ein kontinuierliches Spektrum mit Amplitude $A(k)$ überlagern. Es gilt:

$$\Delta k \Delta x \approx 1 \quad (476)$$

Dies gibt nur die Größenordnung an. Je breiter das Spektrum, umso schärfer ist der Puls (Wellenpaket) im Ortsraum lokalisiert. Analog:

$$\Delta\omega \Delta t \approx 1 \quad (477)$$

Je kürzer der Puls, umso breiter ist Frequenzspektrum.

Hinweis: Unschärferelation in der Quantenmechanik.

Bei vorhandener Dispersion verändert sich die Pulsform im Laufe der Zeit!

9 Die feste Materie

siehe z.B. Kapitel in "Physik" von Dransfeld

10 Flüssigkeiten

10.1 Hydrostatische Kräfte

10.1.1 Auftriebskraft

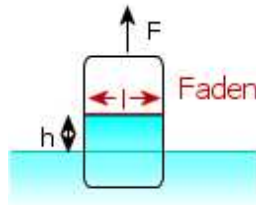
siehe Lehrbücher, z.B. Demtröder

10.1.2 Oberflächenspannung

Flüssigkeiten haben eine Art Haut. Drücke z.B. Büroklammer durch Wasseroberfläche.
 URSACHE: Wechselwirkung der Moleküle untereinander. Im Inneren der Flüssigkeit isotrop (in alle Richtungen wirken im Mittel gleiche Kräfte auf ein Molekül). An der Oberfläche ist die Wechselwirkung anisotrop. Resultierende Kraft nach innen. Oberflächenmolekül hat geringere Bindungsenergie (höhere potentielle Energie) $\hat{=}$ energetisch ungünstiger. Flüssigkeiten versuchen ihre Oberfläche zu minimieren \leadsto Kugelform von Tropfen. Vergrößerung der Oberfläche ist nur durch Leistung von Arbeit möglich.

$$\Delta W = \epsilon \Delta A \quad (478)$$

ΔW : Änderung der Arbeit, ϵ : spezifische Oberflächenenergie, ΔA : Änderung der Fläche



Messung der Oberflächenenergie / -spannung: Gewicht des Bügels: F_1 , Abreißkraft beim Herausziehen: $F_2 \leadsto$ Kraft am Rand der Flüssigkeitslamelle.

$$\leadsto \text{Oberflächenspannung } \sigma = \frac{F}{2l} = \frac{F \Delta h}{2l \Delta h} = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \epsilon \quad (479)$$

Oberflächenspannung versucht Oberfläche eines Wassertropfens zu verkleinern \leadsto Druck p_i im Inneren:

$$\text{Oberflächenenergie } E = \sigma 4\pi r^2 \quad (480)$$

mit dem Radius r des Tropfens. Arbeit, die zur Vergrößerung des Tropfens gegen die Oberflächenspannung nötig ist:

$$p_i \Delta V = \underbrace{p_i 4\pi r^2 \Delta r}_* = \underbrace{\frac{dE}{dr} \Delta r}_{**} \quad (481)$$

: Arbeit

* : Änderung der Oberflächenenergie

$$\frac{dE}{dr} = 8\sigma\pi r \quad (482)$$

$$p_i = \frac{2\sigma}{r} \text{ Kohäsionsdruck} \quad (483)$$

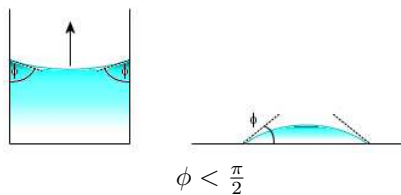
Bemerkung: Bei Seifenblasen gilt

$$p_i = 4 \frac{\sigma}{r}, \quad (484)$$

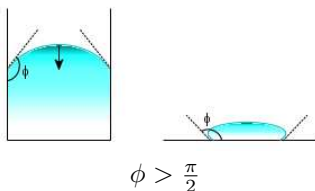
da doppelte Oberfläche.

10.1.3 Benetzung fester Oberflächen

Gleichgewicht zwischen ADHÄSION (Kraft zwischen Flüssigkeitsmolekülen und Grenzflächen) und KOHÄSION (Wechselwirkung zwischen Molekülen der Flüssigkeit). Ist die Adhäsion groß im Vergleich zur Kohäsion (z.B. H_2O auf Glas) \leadsto Flüssigkeit benetzt Oberfläche.



Adhäsion klein gegen Kohäsion (z.B. Hg auf Glas) \leadsto Steighöhe in Kapillare.



Vertikale Komponente der Oberflächenspannung:

$$2\pi r \sigma \cos \phi = \underbrace{\pi r^2 h \rho g}_m \tag{485}$$

$$\leadsto h = \frac{2\sigma \cos \phi}{\rho g r} \tag{486}$$

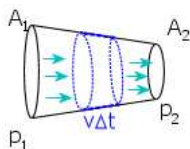
10.2 Kräfte in strömenden Flüssigkeiten

10.2.1 Trägheitskräfte in stationären Strömungen

Die Strömung in Flüssigkeiten ist im Allgemeinen ein schwieriges Problem, das durch die nichtlinearen NARVIER- STOKES BEWEGUNGSGLEICHUNGEN beschrieben wird. Lösung nur für Spezialfälle. Hier benutzen wir das Prinzip der Energieerhaltung und die Newton'schen Axiome um einige Aspekte der Hydrodynamik zu beschreiben.

Annahme: inkompressible Flüssigkeit ($\rho = const$) ohne Reibung.

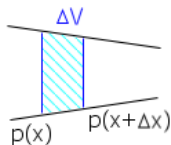
Annahme: Stationäre Strömung. Strömungsgeschwindigkeit hat an jedem Ort einen zeitlich konstanten Wert.



In gleichen Zeitintervallen Δt müssen gleiche Volumenelemente durch Rohr transportiert werden. \leadsto Kontinuitätsgleichung

$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{487}$$

Treibende Kraft, die Strömung treibt ist der DRUCKGRADIENT



$$F_x = -A \left[p(x) + \frac{dp}{dx} \Delta x - p(x) \right] \tag{488}$$

$$= -A \frac{dp}{dx} \Delta x = -\frac{dp}{dx} \Delta V \tag{489}$$

Anwendung von $F = ma$:

$$m \frac{dv}{dt} = F_x \tag{490}$$

$$\leadsto \rho \Delta V \frac{dv}{dt} = -\frac{dp}{dx} \Delta V \tag{491}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{dv}{dt} + \frac{dp}{dx} = 0 \tag{492}$$

PASCAL'SCHES GESETZ $\hat{=}$ Newton'sches Gesetz für Flüssigkeiten. Um ein Volumenelement von x_1 nach x_2 zu bringen muss folgende Arbeit geleistet werden:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = -\Delta V \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dx} dx = -\Delta V (p(x_2) - p(x_1)) = -\Delta V (p_2 - p_1) \quad (493)$$

\leadsto Änderung der potentiellen Energie:

$$\Delta E_{pot} = \Delta V (p_2 - p_1) \quad (494)$$

Potentielle Energie nimmt ab ($p_2 < p_1$). Die kinetische Energie des Volumenelements wird dabei erhöht:

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) \quad (495)$$

$$\leadsto \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = 0 \quad (496)$$

$$\leadsto \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) = \Delta V (p_1 - p_2) \quad (497)$$

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = p_0 = const \quad (498)$$

Gesetz von Bernoulli, wobei p_0 Druck in ruhender Flüssigkeit.

In jeder stationären Strömung sind die Orte erhöhter Strömungsgeschwindigkeit Orte verminderten hydrostatischen Drucks und umgekehrt. Messung der Strömungsgeschwindigkeit

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (499)$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (500)$$

$\leadsto v_1$ bzw. v_2 als Funktion von p_1, p_2, A_1, A_2 .

10.2.2 Viskosität und Reibungskräfte

Bisher haben wir keine Reibungskräfte berücksichtigt. Wenn die Reibungskraft groß gegen die beschleunigende Kraft ist, LAMINARE STRÖMUNG. Man findet experimentell:

$$F_R \propto \frac{v_R}{z} \quad (501)$$

Allgemein gilt für die Reibungskraft

$$F_R = \eta A \frac{dv_x(z)}{dz} \quad (502)$$

mit der Viskosität η , $[\eta] = Pa \cdot s$. Reibung zwischen Flüssigkeitsschichten.

Gesetz von HAGEN- POISSEUILLE: Strömung durch ein Rohr. Welche Konsequenz hat Reibung auf Strömungsprofile bzw. auf transportierte Volumenmengen? Für laminare Strömungen (hinreichend kleine Strömungsgeschwindigkeiten) gilt:

Treibende Kraft auf einem zylindrischen Stromfaden:

$$F_p = \pi r^2 \Delta p \quad (503)$$

Reibungskraft an der "Wand" des Flüssigkeitsfadens:

$$F_R = \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr} \quad (504)$$

Strömungsgleichgewicht:

$$F_p + F_R = 0 \quad (505)$$

$$\leadsto dv = -\frac{r \Delta p}{2\eta l} dr \quad (506)$$

$$\leadsto -\int_{v(r)}^0 dv = \frac{\Delta p}{2\eta l} \int_r^R r dr = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (507)$$

$$\leadsto v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (508)$$

Gesamte durch das Rohr fließende Flüssigkeitsmenge:

$$I = \frac{dV}{dt} \quad (509)$$

$$V = \int_0^R v(r)t2\pi r dr = t \frac{\Delta p 2\pi}{4\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr \quad (510)$$

$$= t \frac{\Delta p 2\pi}{4\eta l} \left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\Delta p \pi}{8\eta l} t R^4$$

$$I = \frac{dV}{dt} = \frac{\Delta p \pi}{8\eta l} R^4 \text{ Hagen- Poisseuille} \quad (511)$$

Stokes'sches Gesetz

Betrachte fallende Kugel mit Radius R in Flüssigkeit. Für kleine Geschwindigkeiten gilt

$$F_R = 6\pi\eta Rv \text{ (ohne Ableitung)} \quad (512)$$

η aus Fallgeschwindigkeit: Ansatz:

$$F_R + F_A + mg = 0 \quad (513)$$

Magnus- Effekt

Kraft auf rotierenden Zylinder oder Kugeln in Flüssigkeiten und Gasen



Höhere Strömungsgeschwindigkeit \leadsto niedrigerer statischer Druck
Kraftrichtung hängt von ω ab; $p_{unten} - p_{oben} > 0$

10.2.3 Strömung bei großen Geschwindigkeiten

Bisherige Betrachtungen galten für kleine Strömungsgeschwindigkeiten: laminare Strömungen. Bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten: TURBULENTE STRÖMUNG. Hinter umströmten Körpern können sich Wirbel bilden. Strömungswiderstand bei turbulenter Strömung:

$$F_w = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2 \quad (514)$$

c_w : Widerstandszahl abhängig von Form des Hindernisses

Scheibe	Kugel	Strömungsprofil
$c_w = 1.12$	$c_w = 0.5$	$c_w = 0.06$

Wie groß ist der Trägheitswiderstand F_w zur Reibungskraft F_R :

$$\frac{F_w}{F_R} = 0.04 \underbrace{\frac{R\rho v}{\eta}}_* \quad (515)$$

*: Reynoldszahl. Reynoldszahl klein: laminare Strömung

10.2.4 Vom Fliegen

Auftrieb beim Fliegen hat ähnliche Ursache wie Magnus- Effekt. Strömungsprofil um eine Tragfläche kann man sich vorstellen als Überlagerung eines symmetrischen Strömungsverlaufes mit einem Wirbel.

$$F_A = A(p_2 - p_1) = \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) A c_A \quad (516)$$